

## Vorkurs Höhere Mathematik

1. Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit

$$\frac{1}{x} > x^2.$$

2. Man bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$ , die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|x+5| - x - 9 < 0.$$

3. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

$$(a) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{für } x > 0, \quad (b) \quad (2+x)^3 \geq 2+x^3 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

4. Bestimmen Sie die Gültigkeitsbereiche der folgenden Ungleichungen.

$$(a) \quad \frac{3x+1}{x+1} > 2x, \quad (b) \quad \sqrt{x+1} - 1 < \frac{x}{2}.$$

5. Es seien  $x, y > 0$  reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichungen vom geometrisch-arithmetischen (a) und vom harmonisch-geometrischen Mittel (b). Überzeugen Sie sich, daß Gleichheit jeweils genau dann gilt, falls  $x = y$  ist.

$$(a) \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad (b) \quad \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

6. Bestimmen Sie die Gültigkeitsbereiche der folgenden Ungleichungen.

$$(a) \quad ||x| - |-5|| < 1, \quad (b) \quad \frac{5x+1}{x-1} > 2x+2, \quad (c) \quad \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x+\frac{1}{4}} > 0.$$

7. (a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$x^2 + \frac{1}{1+4x^2} \geq \frac{3}{4} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

- (b) Für wie viele Werte von  $x$  gilt das Gleichheitszeichen?

8. Bestimmen Sie die Zahlen  $x \in \mathbb{R}$ , die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen:

- (a)  $\frac{1}{x-5} < 2.$
- (b)  $\frac{1}{x-2} < \frac{2}{x+2}.$
- (c)  $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5} = 5.$
- (d)  $|x+1| - |x-1| = 1.$

9. Man löse die folgenden Ungleichungen in  $\mathbb{R}$ :

- (a)  $6x^2 - 13x + 6 < 0.$
- (b)  $x^3 - x^2 < 2x - 2.$
- (c)  $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x+5}.$
- (d)  $||x| - |5|| < 1.$
- (e)  $\sqrt{|x-5|} < 2.$

**Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:**