Vorkurs Höhere Mathematik

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 < \frac{n^3}{3} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2. Für welche natürlichen Zahlen gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie Ihre Vermutungen mit vollständiger Induktion.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = 1-\frac{1}{n+1}$, (b) $2n+1 < n^2 < 2^n$, (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

(a) $\displaystyle\binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{3n+1}}$, (b) $\displaystyle\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}$.

4. Gegeben sei eine Abbildung $f: A \to B$, und es seien $X_1, X_2 \subseteq A$. Zeigen Sie folgendes:

(a) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$
(b) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
(c) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

5. Gegeben sei die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2.$$

Berechnen Sie $f(A)$ und $f^{-1}(A)$ für

(a) $A = [0,1]$,
(b) $A = [-2,0]$,
(c) $A = \mathbb{R}$,
(d) $A = \mathbb{Z}$.

6. Die Abbildung $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ sei durch

$$x \mapsto x^3 + x - \frac{1}{x}$$

definiert. Bestimmen Sie das Bild von f.

7. Betrachten Sie die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Beschreiben Sie:

(a) $f^{-1}([2,3))$,
(b) $f^{-1}((-\infty,0))$.

8. Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}_0,\ x\mapsto x^2$,

(b) $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0,\ x\mapsto x^2$,

(c) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^3+x$,

(d) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ 1\mapsto 2,\ x\mapsto x-1$ für $x>1$,

(e) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto x-1$.

9. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

(a) $f_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x+y$,

(b) $f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ (x,y)\mapsto x^2+y^2-1$,

(c) $f_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x+2y,2x-y)$.

10. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und geben Sie gegebenfalls die Umkehrfunktion an.

(a) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ x\mapsto 3x+4$,

(b) $g:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q},\ x\mapsto 3x+4$.

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:

`http://vorkurse.ma.tum.de/Vorkurse/MW/WebHome` .