Vorkurs Höhere Mathematik

1. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen und entscheiden Sie anhand dieser, ob die Funktionen umkehrbar sind. Geben Sie gegebenfalls die Umkehrabbildung an.

(a) $f:\mathbb{R}\to(-\infty,1]$, $x\mapsto -x^2+1$.
(b) $f:(-\infty,0]\to(-\infty,1]$, $x\mapsto -x^2+1$.
(c) $f:\mathbb{R}\to\{1\}$, $x\mapsto 1$.

2. Dividieren Sie das Polynom $p(x)=x^5+x^4-4x^3+x^2-x-2$ durch das Polynom $q(x)=x^2-x-1$.

3. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren (d.h. in ein Produkt von Polynomen vom Grad 1):

(a) $p(x)=x^3-2x-1$,
(b) $q(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$,
(c) $r(x)=x^4-6x^2+7$.

4. Skizzieren Sie grob ohne einen graphikfähigen Rechner die Graphen der folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x+1)^2-2, & f_2(x) &= \sqrt{2x+1}\\ f_3(x) &= 3\,|2x-1|, & f_4(x) &= \mathrm{e}^{x-1}-1\\ f_5(x) &= 2\sin(3x-\pi), & f_6(x) &= 1/(\ln(2x)) \end{aligned}$$

5. Beschreiben Sie den Graphen der Abbildung:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+y^2.$$

6. Welche der beiden Zahlen π^{e} oder e^{π} ist die größere?

Hinweis: Verwenden Sie die für alle $x\in\mathbb{R}$ geltende Ungleichung $1+x\le \mathrm{e}^x$.

7. Begründen Sie die *Monotonie* der Logarithmusfunktion, das heißt, es gilt

$$\ln x<\ln y \quad \text{für } 0<x<y.$$

8. Berechnen Sie folgende Zahlen ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners:

$$\sqrt{\mathrm{e}^{3\ln 4}}, \qquad \frac{\sqrt[x]{\mathrm{e}^{(2+x)^2-4}}}{\mathrm{e}^x}$$

mit $x>0$.

9. Vereinfachen Sie für $x,y,z\in\mathbb{R}_{>0}$ die Ausdrücke:

(a) $\ln(2x)+\ln(2y)-\ln z-\ln 4$.
(b) $\ln(x^2-y^2)-\ln(2(x-y))$ $(x>y)$.
(c) $\ln(x^{\frac{2}{3}})-\ln(\sqrt[3]{x^{-4}})$.

10. *Eine Aufgaben zum Thema „Quantoren "– für Freaks.*

Es sei $f:D\to\mathbb{R}$ eine Funktion, D ein Intervall. Man definiert: Die Funktion f ist:

$$\text{stetig auf } D :\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \forall x\in D\ \exists\delta>0 : \forall x'\in D : |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$
$$\text{gleichmäßig stetig auf } D :\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 : \forall x\in D\ \forall x'\in D : |x-x'|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x')|<\varepsilon.$$

Wodurch unterscheidet sich die gleichmäßige Stetigkeit von der Stetigkeit? – machen Sie Bilder! Können Sie eine Funktion angeben, die stetig und nicht gleichmäßig stetig ist?

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:

`http://vorkurse.ma.tum.de/Vorkurse/MW/WebHome` .