Vorkurs Höhere Mathematik

1. Bestimmen Sie zu den Zahlen $z_1 = 1+2\,\mathrm{i}$, $z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$ und $z_3 = -2+\mathrm{i}$ Real- und Imaginärteil folgender Ausdrücke:

$$z_1^3 - 3z_1^2 + 2z_1\,, \quad \frac{z_1+z_3}{4z_2-z_3} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{z}_3^2}{2z_1+2z_2+\mathrm{i}}\,.$$

Welche komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ erfüllt die Gleichung

$$z - 1 + 2\,\mathrm{i}\,\overline{z} - \mathrm{i} = 0\,?$$

2. (a) Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polarkoordinatendarstellung an:

$$z_1 = -2\,\mathrm{i}, \quad z_2 = 1+\mathrm{i}, \quad z_3 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i})\,.$$

(b) Zu den komplexen Zahlen mit den Polarkoordinaten

$$r_4 = 2\,,\ \varphi_4 = \frac{1}{2}\pi, \quad r_5 = 1\,,\ \varphi_5 = \frac{3}{4}\pi, \quad r_6 = 3\,,\ \varphi_6 = \frac{5}{4}\pi$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

3. Berechnen Sie zu den komplexen Zahlen

$$z_1 = 1-\mathrm{i}\,,\ z_2 = 1+3\,\mathrm{i} \text{ und } z_3 = 2-4\,\mathrm{i}$$

die Real- und Imaginärteile der Ausdrücke

$$-z_1\,,\ \overline{z_1}\,,\ z_1 z_2\,,\ \frac{z_2}{z_3}\,,\ \frac{z_1}{\overline{z_2}-z_1^2}\,,\ \frac{z_3}{2z_1-\overline{z_2}}\,.$$

4. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteile der Lösungen folgender quadratischer Gleichungen:

(a) $z^2 - 4\,\mathrm{i}\,z + 4z - 8\,\mathrm{i} = 0$,
(b) $(z-(1+2\,\mathrm{i}))\,z = 3-\mathrm{i}$,
(c) $z^2 + 2\,(1+\mathrm{i})\,z = 1-3\,\mathrm{i}$.

5. Welche Menge von Punkten in der komplexen Ebene wird durch die Gleichung

$$M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-3| = 2|z+3|\}$$

beschrieben?

6. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) := \sqrt{x}$. Bestimmen Sie folgende Mengen:

(a) $f^{-1}(\{\mathrm{i}\})$.
(b) $f([-2,2])$.
(c) $f^{-1}(\{a+bi \mid a,b \in (\mathbb{R}\setminus 0)\})$.
(d) $f(\mathbb{R})$.

7. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{100}$.

8. Berechnen Sie die komplexen Wurzeln:

(a) $\sqrt{-2\,\mathrm{i}}$ (b) $\sqrt[3]{-8}$ (c) $\sqrt{8\left(1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)}$

9. Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+\mathrm{i}| \leq 3\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\bar{z}-\mathrm{i}) = z\}$.

10. Begründen Sie: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|\,.$$

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter:

`http://vorkurse.ma.tum.de/Vorkurse/MW/WebHome` .