

Vorkurs Höhere Mathematik

1. Gegeben seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Mengen jeweils, ob sie linear abhängig sind:

- i. $\{x_1, x_2, x_3\}$,
- ii. $\{x_1, x_2, x_4\}$,
- iii. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
- iv. $\{x_2, x_3, x_4\}$,
- v. $\{x_1 + x_2, x_3\}$.

(b) Für welche der Mengen aus Aufgabe (a) kann man $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination schreiben?

Ist die Darstellung eindeutig?

2. Schreiben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Schreiben Sie $p = x^3$ als Linearkombination der folgenden Polynome:

$$p_1 = 1, p_2 = 1 + x, p_3 = 1 + x + x^2, p_4 = 1 + x + x^2 + x^3.$$

4. Sind die Funktionen $\text{Id}_{\mathbb{R}}$, \sin , \cos linear unabhängig?

5. Es seien folgende Vektoren im \mathbb{R}^2 gegeben:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie jeden dieser Vektoren als Linearkombination der Vektoren:

(a) $u := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

6. Gegeben seien folgende beiden Mengen von Vektoren:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Mengen linear unabhängig sind.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ an, so daß v nicht durch Elemente aus S_1 bzw. aus S_2 linear kombiniert werden kann.

7. Gegeben seien jeweils zwei Vektoren v_1 und v_2 .

$$(a) \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (b) \quad v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beschreiben Sie das Erzeugnis $\langle v_1, v_2 \rangle$. In welcher geometrischen Beziehung befinden sich alle Linearkombinationen? Geben Sie die entsprechenden Koordinatengleichungen an.

8. Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{C}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 + z'_1 \\ z_2 + z'_2 \\ z_3 + z'_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \\ \lambda z_3 \end{pmatrix}$$

für $\lambda, z_k, z'_k \in \mathbb{C}, k \in \{1, 2, 3\}$ wird \mathbb{C}^3 zu einem (komplexen) Vektorraum.

Überprüfen Sie die Vektoren

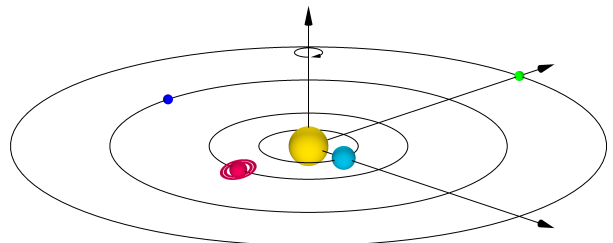
$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf lineare Unabhängigkeit. Kann man den Vektor $\begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ 8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination obiger drei Vektoren darstellen?

9. *Der Schwerpunkt des Sonnensystems.* In der Tabelle sind die ungefähren Massen der Planeten und ihre genäherten Abstände von der Sonne angegeben.

Bestimmen Sie den ungefähren Schwerpunkt des Sonnensystems. Berücksichtigen Sie hierzu vereinfachend nur die Sonne und die Planeten Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Gehen Sie weiter von einem ebenen Sonnensystem aus und tragen Sie Jupiter auf der positiven x_1 -Achse, Saturn auf der negativen x_2 -Achse, Uranus auf der negativen x_1 -Achse und schließlich Neptun auf der positiven x_2 -Achse auf.

	Masse in Erdmassen	Sonnenabstand in AE
Sonne	333000	0
Merkur	0.06	0.4
Venus	0.8	0.7
Erde	1	1
Mars	0.1	1.5
Jupiter	318	5
Saturn	95	10
Uranus	15	20
Neptun	17	30
Pluto	0.002	40



Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter: