

Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{x} > x^2.$$

Lösung. Bei Multiplikation mit x ist eine Fallunterscheidung notwendig.

1. Für $x > 0$ erhält man: $1 > x^3$, also weiter:

$$x < \sqrt[3]{1} = 1.$$

Wir erhalten die Lösungsmenge $L_1 = (0, 1)$.

2. Für $x < 0$ erhält man: $1 < x^3$, also weiter:

$$x > \sqrt[3]{1} = 1.$$

Wir erhalten die Lösungsmenge $L_2 = \emptyset$.

Die gesamte Lösungsmenge ist $L = (0, 1)$.

2. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$|x + 5| - x - 9 < 0.$$

Lösung. 1. Fall: $x \geq -5$: Es ergibt sich $-4 < 0$, was immer erfüllt ist. Also ist $L_1 = [-5, \infty)$.

2. Fall: $x < -5$: Wir erhalten $-2x - 14 < 0$, die Lösungsmenge hiervon lautet $L_2 = (-7, -5)$.

Insgesamt erhalten wir als die Lösungsmenge $L = (-7, \infty)$.

3. Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen.

$$(a) \quad x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad \text{für } x > 0, \quad (b) \quad (2+x)^3 \geq 2+x^3 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

Lösung.

(a) Es gilt:

$$0 \leq (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Nun teilen wir diese Ungleichung durch $x > 0$ (wobei die Richtung des Ungleichheitszeichens erhalten bleibt, da $x > 0$) und addieren anschliessend auf beiden Seiten 2.

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} (2+x)^3 &= 8 + 12x + 6x^2 + x^3 = 6(x^2 + 2x + 1) + 2 + x^3 = 6(x+1)^2 + 2 + x^3 \\ &\geq 2 + x^3. \end{aligned}$$

Es gilt die Gleichheit genau, falls $x = -1$.

4. Bestimmen Sie die Gültigkeitsbereiche der folgenden Ungleichungen.

$$(a) \frac{3x+1}{x+1} > 2x, \quad (b) \sqrt{x+1} - 1 < \frac{x}{2}.$$

Lösung.

(a) Damit der Nenner nicht verschwindet, schränken wir den Bereich der zu untersuchenden x auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ein.

Fall 1: $x+1 > 0$

$$\frac{3x+1}{x+1} > 2x \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+1/2).$$

Ein Faktor muß positiv und einer negativ sein.

Fall 1.1: $x-1 > 0$ und $x+1/2 < 0$: Widerspruch.

Fall 1.2: $x-1 < 0$ und $x+1/2 > 0 \Leftrightarrow -1/2 < x < 1$: Dies impliziert die Voraussetzung $x+1 > 0$.

Fall 2: $x+1 < 0$:

$$\frac{3x+1}{x+1} > 2x \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+1/2).$$

Beide Faktoren müssen das gleiche Vorzeichen haben.

Fall 2.1: $x-1 > 0$ und $x+1/2 > 0$: Widerspruch zur Voraussetzung $x+1 < 0$.

Fall 2.2: $x-1 < 0$ und $x+1/2 < 0$: dies wird von der Voraussetzung $x+1 < 0$ impliziert.

Der Gültigkeitsbereich lautet also $(-\infty, -1) \cup (-1/2, 1)$.

(b) Damit die Wurzel wohldefiniert ist, schränken wir den Bereich der zu untersuchenden x auf $x \in [-1, \infty)$ ein. Unter dieser Voraussetzung finden wir das folgende.

$$\sqrt{x+1} - 1 < \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x+1 < \frac{x^2}{4} + x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 0.$$

Der Gültigkeitsbereich lautet also $[-1, 0) \cup (0, \infty)$.

5. Es seien $x, y > 0$ reelle Zahlen. Beweisen Sie die Ungleichungen vom geometrisch-arithmetischen (a) und vom harmonisch-geometrischen Mittel (b). Überzeugen Sie sich, daß Gleichheit jeweils genau dann gilt, falls $x = y$ ist.

$$(a) \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}, \quad (b) \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}.$$

Lösung.

(a)

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2.$$

Gleichheit $\sqrt{xy} = \frac{x+y}{2}$ gilt also genau dann, wenn $x = y$.

(b)

$$\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \quad \Leftrightarrow \quad 2\frac{xy}{\sqrt{xy}} \leq x+y \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Der Aufgabenteil (b) ist also auf (a) zurückgeführt.

6. Bestimmen Sie die Gültigkeitsbereiche der folgenden Ungleichungen.

$$(a) \quad ||x| - |-5|| < 1, \quad (b) \quad \frac{5x+1}{x-1} > 2x+2, \quad (c) \quad \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x+\frac{1}{4}} > 0.$$

Lösung.

(a)

$$||x| - |-5|| < 1 \Leftrightarrow ||x| - 5| < 1 \Leftrightarrow -1 < |x| - 5 < 1 \Leftrightarrow 4 < |x| < 6.$$

Der Gültigkeitsbereich lautet also $(-6, -4) \cup (4, 6)$.

(b) Damit der Nenner nicht verschwindet, schränken wir den Bereich der zu untersuchenden x auf $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ ein.

Fall 1: $x - 1 > 0$:

$$\frac{5x+1}{x-1} > 2x+2 \Leftrightarrow 0 > 2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)(x+1/2).$$

Ein Faktor muss positiv und einer negativ sein.

Fall 1.1: $x - 3 > 0$ und $x + 1/2 < 0$: gegenseitiger Widerspruch

Fall 1.2: $x - 3 < 0$ und $x + 1/2 > 0 \Leftrightarrow -1/2 < x < 3$: mit der Voraussetzung $x - 1 > 0$ erhalten wir also $1 < x < 3$.

Fall 2: $x - 1 < 0$:

$$\frac{5x+1}{x-1} > 2x+2 \Leftrightarrow 0 < 2x^2 - 5x - 3 = 2(x-3)(x+1/2).$$

Beide Faktoren müssen das gleiche Vorzeichen haben.

Fall 2.1: $x - 3 > 0$ und $x + 1/2 > 0$: Widerspruch zur Voraussetzung $x - 1 < 0$.

Fall 2.2: $x - 3 < 0$ und $x + 1/2 < 0$: Da nach Voraussetzung $x - 1 < 0$, folgt $x < -1/2$.

Der Gültigkeitsbereich lautet also $(-\infty, -1/2) \cup (1, 3)$.

(c) Damit die Wurzel wohldefiniert ist, schränken wir den Bereich der zu untersuchenden x auf $x \in [0, \infty)$ ein.

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x+\frac{1}{4}} > 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x}} > \sqrt{x+\frac{1}{4}} \Leftrightarrow x + \sqrt{x} > x + \frac{1}{4} \\ &\Leftrightarrow x > \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Der Gültigkeitsbereich lautet also $(1/16, \infty)$.

7. (a) Beweisen Sie die Ungleichung

$$x^2 + \frac{1}{1+4x^2} \geq \frac{3}{4} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

(b) Für wie viele Werte von x gilt das Gleichheitszeichen?

Lösung.

- (a) Wir multiplizieren mit $1 + 4x^2 > 0$, formen um und erhalten durch quadratisches Ergänzen jeweils die äquivalenten Ungleichungen

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{1+4x^2} &\geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow x^2(1+4x^2) + 1 - \frac{3}{4}(1+4x^2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4x^4 - 2x^2 + \frac{1}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^4 - \frac{1}{2}x^2) + \frac{1}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^2 - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - \frac{1}{4})^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Die Letzte Zeile ist offensichtlich für alle $x \in \mathbb{R}$ gültig, also auch die erste.

- (b) Aus (a) ergibt sich mit einem Gleichheitszeichen anstatt \geq , daß $x^2 + \frac{1}{1+4x^2} = \frac{3}{4}$ genau dann gilt, wenn $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ ist. Gleichheit gilt also genau für zwei Werte von x , nämlich $x = \pm \frac{1}{2}$.

8. Bestimmen Sie die Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen:

- (a) $\frac{1}{x-5} < 2$.
 (b) $\frac{1}{x-2} < \frac{2}{x+2}$.
 (c) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5} = 5$.
 (d) $|x+1| - |x-1| = 1$.

Lösung. (a) Es muß auf jeden Fall $x \neq 5$ gelten. Wir multiplizieren die Gleichung mit $x-5$ durch und unterscheiden dabei zwei Fälle:

1. Fall. $x-5 > 0$: Dann gilt:

$$\frac{1}{x-5} < 2 \Leftrightarrow 1 < 2x-10 \Leftrightarrow 11 < 2x \Leftrightarrow x > \frac{11}{2}.$$

Beachtet man die Voraussetzung $x > 5$, so liefert dies einen ersten Teil der Lösungsmenge:

Die Ungleichung ist für alle $x > \frac{11}{2}$ erfüllt: $L_1 = (\frac{11}{2}, \infty)$.

2. Fall. $x-5 < 0$: Dann gilt:

$$\frac{1}{x-5} < 2 \Leftrightarrow 1 > 2x-10 \Leftrightarrow 11 > 2x \Leftrightarrow x < \frac{11}{2}.$$

Beachtet man die Voraussetzung $x < 5$, so liefert dies einen zweiten Teil der Lösungsmenge:

Die Ungleichung ist für alle $x < 5$ erfüllt: $L_2 = (-\infty, 5)$.

Die gesamte Lösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 5) \cup (\frac{11}{2}, \infty)$.

(b) Es muß auf jeden Fall $x \neq \pm 2$ gelten. Wir multiplizieren die Ungleichung mit dem gemeinsamen Nenner $(x-2)(x+2)$ durch und unterscheiden dabei zwei Fälle:

1. Fall. $(x-2)(x+2) > 0$, d. h. $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{x-2} < \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow (x+2) < 2(x-2) \Leftrightarrow x > 6.$$

Beachtet man die Voraussetzung $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$, so liefert dies einen ersten Teil der Lösungsmenge:

Die Ungleichung ist für alle $x > 6$ erfüllt: $L_1 = (6, \infty)$.

2. Fall. $(x-2)(x+2) < 0$, d. h. $x \in (-2, 2)$. Dann gilt:

$$\frac{1}{x-2} < \frac{2}{x+2} \Leftrightarrow (x+2) > 2(x-2) \Leftrightarrow x < 6.$$

Beachtet man die Voraussetzung $x \in (-2, 2)$, so liefert dies einen zweiten Teil der Lösungsmenge:

Die Ungleichung ist für alle $x \in (-2, 2)$ erfüllt: $L_2 = (-2, 2)$.

Die gesamte Lösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2 = (-2, 2) \cup (6, \infty)$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} + \sqrt{x-5} = 5 &\Leftrightarrow (\sqrt{x+5} + \sqrt{x-5})(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}) = 10 = 5(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-5}) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x+5} - \sqrt{x-5} = 2. \end{aligned}$$

Addition dieser letzten Gleichung zur ursprünglichen Gleichung ergibt: $2\sqrt{x+5} = 7$, d. h. $x = \frac{29}{4}$.

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{29}{4}\}$.

(d) Wir unterscheiden drei Fälle:

1. Fall. $x < -1$: Dann gilt

$$|x+1| = -x-1 \text{ und } |x-1| = -x+1, \text{ d. h. } -2 = 1.$$

In diesem Fall ist die Gleichung also nicht lösbar.

2. Fall. $-1 \leq x < 1$: Dann gilt

$$|x+1| = x+1 \text{ und } |x-1| = -x+1, \text{ d. h. } 2x = 1, \text{ d. h. } x = \frac{1}{2}.$$

In diesem Fall ist $x = \frac{1}{2}$ die einzige Lösung.

3. Fall. $x \geq 1$: Dann gilt

$$|x+1| = x+1 \text{ und } |x-1| = x-1, \text{ d. h. } 2 = 1.$$

In diesem Fall ist die Gleichung nicht lösbar.

Die Lösungsmenge ist also $L = \{\frac{1}{2}\}$.

9. Man löse die folgenden Ungleichungen in \mathbb{R} :

(a) $6x^2 - 13x + 6 < 0$.

(b) $x^3 - x^2 < 2x - 2$.

(c) $\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x+5}$.

(d) $||x| - |5|| < 1$.

(e) $\sqrt{|x-5|} < 2$.

Lösung. (a) Es gilt

$$6x^2 - 13x + 6 = 6 \left(x - \frac{2}{3}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} < 0 \wedge x - \frac{2}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}.$$

Damit ist $L = (\frac{2}{3}, \frac{3}{2})$ die Lösungsmenge.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 < 2x - 2 &\Leftrightarrow x^2(x-1) < 2(x-1) \\ &\Leftrightarrow (x-1 > 0 \wedge x^2 < 2) \vee (x-1 < 0 \wedge x^2 > 2) \\ &\Leftrightarrow (x > 1 \wedge |x| < \sqrt{2}) \vee (x < 1 \wedge |x| > \sqrt{2}) \\ &\Leftrightarrow (x > 1 \wedge -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}) \vee (x < 1 \wedge (x > \sqrt{2} \vee x < -\sqrt{2})) \\ &\Leftrightarrow (1 < x < \sqrt{2}) \vee (x < -\sqrt{2}).\end{aligned}$$

Damit ist $L = (1, \sqrt{2}) \cup (-\infty, -\sqrt{2})$ die Lösungsmenge.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-2} \leq \frac{1}{x+5} &\Leftrightarrow \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+5} = \frac{x+5 - (x-2)}{(x-2)(x+5)} = \frac{7}{(x-2)(x+5)} < 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x+5) < 0 \Leftrightarrow -5 < x < 2.\end{aligned}$$

Damit ist $L = (-5, 2)$ die Lösungsmenge.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}||x| - |5|| < 1 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge |x-5| < 1) \vee (x < 0 \wedge |-x-5| < 1) \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge -1 < x-5 < 1) \vee (x < 0 \wedge -1 < -x-5 < 1) \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge 4 < x < 6) \vee (x < 0 \wedge -4 > x > -6) \\ &\Leftrightarrow (4 < x < 6) \vee (-6 < x < -4).\end{aligned}$$

Damit ist $L = (-6, -4) \cup (4, 6)$ die Lösungsmenge.

(e) Es gilt

$$\sqrt{|x-5|} < 2 \Leftrightarrow |x-5| < 4 \Leftrightarrow -4 < x-5 < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 9.$$

Damit ist $L = (1, 9)$ die Lösungsmenge.