Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. Berechnen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & - & 7y & = & 3 \\ -10x & + & 14y & = & -6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 4 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 0 \\ 7x & + & 8y & + & 9z & = & 4 \end{array}$$

Lösung: (a)

$$\left(\begin{array}{rr|r} 5 & -7 & 3 \\ -10 & 14 & -6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|r} 5 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir wählen für $y = \lambda \in \mathbb{R}$, es gilt dann $x = (3+7\lambda)/5 = \frac{3}{5} + \frac{7}{5}\lambda$. Die Lösungsmenge ist also $L = \{(\frac{3}{5} + \frac{7}{5}\lambda, \lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir setzen $x_4 = \lambda$, und es gilt $x_2 = x_3 = 0$, $x_1 = -x_4 = -\lambda$. Die Lösungsmenge ist also

$$L = \{(-\lambda, 0, 0, \lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}\,.$$

(c)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -16 \\ 0 & -6 & -12 & -24 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right)$$

Offenbar ist die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems die leere Menge: $L = \emptyset$.

2. Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat das System

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & tz & = & 2 \\ 2x & + & ty & - & z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & t \end{array}$$

(i) keine, (ii) genau eine, (iii) mehr als eine Lösung? Berechnen Sie für $t \in \{2,3\}$ alle Lösungen.

Lösung:

Wir bringen wieder die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A \mid b)$ auf Zeilenstufenform, achten dabei allerdings darauf, daß wir Fallunterscheidungen so lange wie möglich hinausschieben – also nicht durch t dividieren oder ähnliches!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 2 \\ 2 & t & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & t \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 2 \\ 0 & t-2 & -1-2t & -3 \\ 0 & 1 & 2-3t & t-6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 2 \\ 0 & 1 & 2-3t & t-6 \\ 0 & t-2 & -1-2t & -3 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 2 \\ 0 & 1 & 2-3t & t-6 \\ 0 & 0 & 3(t-3)(t-\frac{1}{3}) & -(t-3)(t-5) \end{array}\right).$$

Die Einträge der letzten Zeile ergeben sich aus $-1-2t-(t-2)(2-3t) = 3t^2-10t+3 = 3(t-3)(t-\frac{1}{3})$ und $-3-(t-2)(t-6) = -(t^2-8t+15) = -(t-3)(t-5)$. Für $t \notin \{3, \frac{1}{3}\}$ bleiben drei von der Nullzeile verschiedene Zeilen, das Gleichungssystem ist also eindeutig lösbar. Für $t = \frac{1}{3}$ ist die letzte Zeile links vom Gleichheitszeichen eine Nullzeile, rechts vom Gleichheitszeichen steht aber etwas von Null verschiedenes, das Gleichungssystem also unlösbar. Für $t = 3$ ist das Gleichungssystem lösbar, aber nicht eindeutig lösbar. Abschließend berechnen wir die Lösungen für $t \in \{2, 3\}$.

$\underline{t = 2:}$ Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

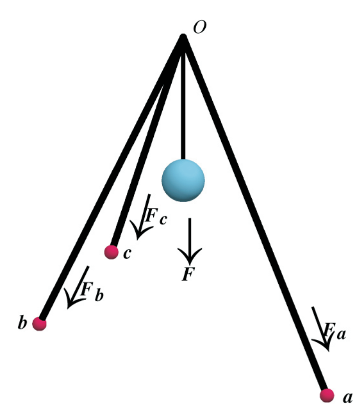
also $z = \frac{3}{5}$, $y = -4+4z = -\frac{8}{5}$, $x = 2-y-2z = \frac{12}{5}$, d. h. $L = \{(\frac{12}{5}, \frac{-8}{5}, \frac{3}{5})\}$.

$\underline{t = 3:}$ Wir erhalten

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

also $y = -3+7z$, $x = 2-y-3z = 5-10z$ und damit als Lösungsmenge

$$L = \{(5-10\lambda, -3+7\lambda, \lambda)\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$



3. Im Ursprung $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ des $\mathbb{R}^3$ laufen die drei Stäbe eines Stabwerks zusammen, die von den Punkten

$$a = (-2, 1, -5), b = (2, -2, -4), c = (1, 2, -3)$$

ausgehen (siehe Skizze). Im Ursprung $\mathbf{0}$ wirkt die *vektorielle* Kraft $\mathbf{F} = (0, 0, -56)$ in Newton. Welche Kräfte wirken auf die Stäbe?
Hinweis: Man zerlege die Kraft $\mathbf{F}$ in drei Kräfte $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{F}_b$ und $\mathbf{F}_c$ in Richtung der Stäbe.

Lösung. Es ist die Kraft $\mathbf{F}$ in drei Kräfte zu zerlegen, welche in die Richtungen der Punkte $a = (-2, 1, 5)$, $b = (2, -2, -4)$ und $c = (1, 2, -3)$ zeigen, wir bezeichnen diese mit $\mathbf{F}_a$, $\mathbf{F}_b$ und $\mathbf{F}_c$.

Gesucht sind also $l_1, l_2, , l_3 \in \mathbb{R}$ mit $l_1 \cdot a + l_2 \cdot b + l_3 \cdot c = \mathbf{F}$ – es gilt dann $l_1 \cdot a = \mathbf{F}_a$, $l_2 \cdot b = \mathbf{F}_b$ und $l_3 \cdot c = \mathbf{F}_c$.

Dies drückt aus, daß die Kräfte in die Richtungen der Stäbe zeigen. (Addition und Multiplikation verstehen wir hier durchwegs komponentenweise.)

Wir formulieren die Gleichung

$$l_1 \cdot a + l_2 \cdot b + l_3 \cdot c = \mathbf{F}$$

als ein lineares Gleichungssystem und geben sogleich die erweiterte Koeffizientenmatrix an, welche wir auf Zeilenstufenform bringen, um die Lösung l_1, l_2, l_3 zu bestimmen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ -5 & -4 & -3 & -56 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & -14 & 7 & -56 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & -56 \end{array}\right)$$

Es ist $(6, 5, 2)$ die eindeutige Lösung des Systems. Damit haben wir die Kräfte in Richtung der Stäbe ermittelt, es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_a &= (-12, 6, -30), \\ \mathbf{F}_b &= (10, -10, -20), \\ \mathbf{F}_c &= (2, 4, -6). \end{aligned}$$

4. Ein Hypothekendarlehen über 100.000 Euro wird mit 7 % jährlich verzinst und mit gleichbleibender Rate A (Annuität) jeweils am Ende eines Jahres getilgt.

Wie groß muß A sein, wenn das Darlehen mit der 20. Tilgungsrate ganz zurückgezahlt sein soll?

Lösung. Wir bezeichnen die Schuld nach der k-ten Rate mit S_k. Der *Verzinsungsfaktor* ist $q = 1{,}07$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} S_0 &= 100.000 \text{ Euro}, \\ S_1 &= S_0 \cdot q - A, \\ S_2 &= S_1 \cdot q - A = (S_0 \cdot q - A) \cdot q - A, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ S_n &= (\cdots(S_0 \cdot q - A) \cdot q - A) \cdot q - A) \cdots) \cdot q - A \\ &= S_0 \cdot q^n - A \cdot (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1) \\ &= S_0 \cdot q^n - A \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $S_{20} = 0$ liefert demnach

$$0 = S_0 \cdot q^{20} - A \cdot \frac{q^{20} - 1}{q - 1}.$$

Aufgelöst nach A bedeutet das:

$$A = S_0 \cdot q^{20} \frac{q - 1}{q^{20} - 1} \approx 9439{,}29 \text{ Euro}.$$

5. In einem Neubaugebiet wurden innerhalb eines Zeitraumes von etwa 12 Jahren insgesamt 4380 Wohneinheiten fertiggestellt. Pro Tag wurde jeweils eine Wohnung bezugsfertig. vom Bezugstag der ersten Wohnung bis einen Tag nach Übergabe der letzten Einheit wurden von den Bewohnern insgesamt

$1.8709 \cdot 10^8$ kWh Strom verbraucht. Ermitteln Sie den durchschnittlichen Verbrauch pro Tag und Wohnung.

Lösung. Wir nummerieren die Wohneinheiten in der Reihenfolge ihrer Fertigstellung durch. Die k-te Wohnung hat $4380-(k-1)$ Verbrauchstage, $k = 1, 2, \ldots, 4380$. Die Zahlen $4380-(k-1)$ durchlaufen die Werte $4380, 4379, \ldots, 1$. Die Anzahl N der „Wohnungsverbrauchtage“ ist

$$N = \sum_{k=1}^{4380} k = \frac{4380 \cdot 4381}{2} = 9594390\,.$$

Damit ist der durchschnittliche Verbrauch pro Tag und Wohnung

$$\frac{1.8709 \cdot 10^8}{N} = 19.5 \text{ kWh}\,.$$

6. Paul braucht zum Streichen der Decken und Wände eines Zimmers 2 Stunden, Paula braucht dafür 5 Stunden. Wie lange brauchen Paul und Paula, wenn sie das Zimmer gemeinsam streichen?

Lösung. Die Antwort $3,5$ Stunden ist natürlich nicht richtig, es kann ja nicht sein, daß die beiden gemeinsam länger brauchen als Paul alleine.

Auf eine etwas eigenwillige Art kann man die Aufgabe wie folgt lösen: Paul schafft in zehn Stunden fünf solche Zimmer, Paula in der gleichen Zeit zwei. Gemeinsam schaffen sie also sieben Zimmer in zehn Stunden, für ein Zimmer brauchen sie demnach $\frac{10}{7}$ Stunden, d. h. eine Stunde und rund 26 Minuten.

7. Jemand kauft in einem Bierdepot die Hälfte der vorhandenen Träger und noch einen halben. Vom Rest werden wieder die Hälfte und ein halber Träger verkauft. Nach n solchen Verkäufen ist das Depot leer. Wie viele Träger Bier wurden insgesamt verkauft?

Lösung. Es sei N die Anzahl der verkauften Träger:

Beim 1. Verkauf werden $\frac{N}{2}+\frac{1}{2}$ Träger verkauft, es bleibt der Rest $\frac{N}{2}-\frac{1}{2}$.

Beim 2. Verkauf werden $\frac{N}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{N}{4}+\frac{1}{4}$ Träger verkauft, es bleibt der Rest $\frac{N}{4}-\frac{3}{4}$.

Beim 3. Verkauf werden $\frac{N}{8}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{N}{8}+\frac{1}{8}$ Träger verkauft, es bleibt der Rest $\frac{N}{8}-\frac{7}{8}$.

Beim n-ten Verkauf werden $\frac{N}{2^n}+\frac{1}{2^n}$ Träger verkauft, es bleibt der Rest $\frac{N}{2^n}-\frac{2^n-1}{2^n}$.

Da beim n-ten Verkauf das Depot leer ist, gilt

$$\frac{N}{2^n} - \frac{2^n-1}{2^n} = 0\,.$$

Auflösen dieser Gleichung nach N liefert:

$$N = 2^n \, \frac{2^n-1}{2^n} = 2^n - 1\,.$$