

Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\sum_{k=1}^n (k-1)^2 < \frac{n^3}{3} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung. $n = 1$: Die Ungleichung $0 < 1/3$ ist richtig.

Wir nehmen an, daß die Ungleichung für ein $n \in \mathbb{N}$ richtig ist und zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 < \frac{(n+1)^3}{3}.$$

Induktionssschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^2 = \sum_{k=1}^n (k-1)^2 + n^2 < \frac{n^3}{3} + n^2 = \frac{n^3 + 3n^2}{3} < \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} = \frac{(n+1)^3}{3}.$$

Also gilt die Ungleichung auch für $n+1$ und damit für alle natürlichen Zahlen.

2. Für welche natürlichen Zahlen gelten die folgenden Aussagen? Beweisen Sie Ihre Vermutungen mit vollständiger Induktion.

$$(a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}, \quad (b) \quad 2n+1 < n^2 < 2^n, \quad (c) \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Lösung.

(a) Die Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen.

$$\text{Induktionsvoraussetzung für } n = 1: \quad \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Wir können (a) auch ohne vollständige Induktion direkt mittels "Teleskopsumme" berechnen: da

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ finden wir}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

- (b) Die erste Aussage $2n + 1 < n^2$ ist nicht richtig für $n = 1, 2$, sie gilt für alle $n \geq 3$. Die zweite Aussage $n^2 < 2^n$ ist nicht richtig für $n = 1, 2, 3, 4$, sie gilt für alle $n \geq 5$.

Induktionsvoraussetzung für $n = 5$ (beide Aussagen): $11 < 25 < 32$.

Induktionsschluß für $2n + 1 < n^2$:

$$2(n+1) + 1 = (2n+1) + 2 < n^2 + 2 < n^2 + 2 + (2n-1) = (n+1)^2.$$

Induktionsschluß für $n^2 < 2^n$:

$$(n+1)^2 = n^2 + (2n+1) < n^2 + n^2 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Daß die erste Aussage für $n = 3, 4$ gilt, ist klar.

- (c) Diese Aussage gilt für alle natürlichen Zahlen. Induktionsvoraussetzung für $n = 1$: $1 = \frac{2 \cdot 3}{6}$.

Induktionsschluß:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion.

$$(a) \binom{2n}{n} \leq \frac{2^{2n}}{\sqrt{3n+1}}, \quad (b) \binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}.$$

Lösung.

- (a) Induktionsvoraussetzung für $n = 1$: $2 = \binom{2}{1} \leq \frac{2^2}{\sqrt{3+1}} = 2$.

Induktionsschluß:

Wir berechnen das folgende:

$$\begin{aligned} \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}} &= \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n)! 2(n+1)(2n+1)}{(n!)^2 (n+1)^2} = \binom{2n}{n} \frac{2(2n+1)}{n+1} \\ &= \frac{2^{2(n+1)}}{\sqrt{3(n+1)+1}} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{3n+1}} \frac{2^2 \sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}}. \end{aligned}$$

Falls also

$$\frac{2(2n+1)}{n+1} \leq \frac{2^2 \sqrt{3n+1}}{\sqrt{3n+4}},$$

so ist die Behauptung bewiesen. Quadrieren auf beiden Seiten liefert:

$$\begin{aligned} 4(2n+1)^2(3n+4) &\leq 16(n+1)^2(3n+1) \\ \Leftrightarrow (4n^2 + 4n + 1)(3n+4) &\leq (4n^2 + 8n + 4)(3n+1) \\ \Leftrightarrow 12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 &\leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4 \\ \Leftrightarrow 0 &\leq n. \end{aligned}$$

- (b) Induktionsvoraussetzung für $n = 0$:

$$\binom{1}{k+1} = \begin{cases} 1, & \text{für } k=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = \sum_{m=k}^0 \binom{m}{k}.$$

Induktionsschluß:

$$\sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

4. Gegeben sei eine Abbildung $f : A \rightarrow B$, und es seien $X_1, X_2 \subseteq A$. Zeigen Sie folgendes:

- (a) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2)$
- (b) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$
- (c) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$

Lösung.

(a) Es sei $X \subseteq A$. Das Bild von X unter f ist gemäß Vorlesung definiert als

$$f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}.$$

Es sei also $b \in f(X_1)$, d.h. $b = f(a)$ für $a \in X_1$. Da nun aber nach Voraussetzung $X_1 \subseteq X_2$, ist $a \in X_2$ und somit $b \in f(X_2)$.

(b) Die Gleichheit zweier Mengen P und Q , $P = Q$, zeigen wir, indem wir begründen, daß sowohl $P \subseteq Q$ als auch $P \supseteq Q$ gilt:

“ \subseteq ” Es sei $b \in f(X_1 \cup X_2)$, d.h. $b = f(a)$, wobei $a \in X_1 \cup X_2$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß $a \in X_1$. Dann folgt aber, daß $b \in f(X_1)$ und somit $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$.

“ \supseteq ” Es sei $b \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß $b \in f(X_1)$, also $b = f(a)$ für ein $a \in X_1$. Somit ist auch $a \in X_1 \cup X_2$ und $b \in f(X_1 \cup X_2)$.

(c) Es sei $b \in f(X_1 \cap X_2)$, d.h. $b = f(a)$ für ein $a \in X_1 \cap X_2$. Dann gilt aber $b \in f(X_1)$ und $b \in f(X_2)$, d.h. $b \in f(X_1) \cap f(X_2)$.

Die beiden Mengen sind im allgemeinen nicht gleich: Z. B. $A = B = \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $X_1 = [0, \pi/2]$, $X_2 = [\pi/2, \pi]$. Dann gilt $f(X_1) = f(X_2) = [0, 1]$ und $X_1 \cap X_2 = \{\pi/2\}$. Aber zu $1/2 \in f(X_1) \cap f(X_2)$ gibt es kein $x \in X_1 \cap X_2$, so daß $1/2 = f(x)$.

5. Gegeben sei die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2.$$

Berechnen Sie $f(A)$ und $f^{-1}(A)$ für

- (a) $A = [0, 1]$,
- (b) $A = [-2, 0]$,
- (c) $A = \mathbb{R}$,
- (d) $A = \mathbb{Z}$.

Lösung. (a) Es ist $f([0, 1]) = [0, 1]$ und $f^{-1}([0, 1]) = [-1, 1]$.

(b) Es ist $f([-2, 0]) = [0, 4]$ und $f^{-1}([-2, 0]) = \{0\}$.

(c) Es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$ und $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(d) Es ist $f(\mathbb{Z}) = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ und $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \{\pm\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} = \{0, \pm 1, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}, \dots\}$.

6. Die Abbildung $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei durch

$$x \mapsto x^3 + x - \frac{1}{x}$$

definiert. Bestimmen Sie das Bild von f .

Lösung. Es sei $x \in (0, 1]$. Dann gilt $x^3 \in (0, 1]$, $x \in (0, 1]$ und $\frac{1}{x} \in [1, \infty)$. Folglich gilt $x^3 + x \in (0, 2]$ sowie nach wie vor $\frac{1}{x} \in [1, \infty)$. Nun erhalten wir weiter $f(x) = x^3 + x - \frac{1}{x} \in (-\infty, 1]$. Also: $\text{Bild}(f) = f((0, 1]) \subseteq (-\infty, 1]$. Weil die Funktion keine Sprünge macht (sie ist *stetig*), werden Intervalle auf Intervalle abgebildet. Somit ist $f((0, 1])$ ein Intervall, das das gesamte Intervall $(-\infty, 1]$ überdeckt, wir erhalten: $f((0, 1]) = (-\infty, 1]$.

7. Betrachten Sie die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Beschreiben Sie:

- (a) $f^{-1}([2, 3))$,
- (b) $f^{-1}((-\infty, 0))$.

Lösung. (a) Es gilt

$$f^{-1}([2, 3)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \in [2, 3)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \in [\sqrt{2}, \sqrt{3})\}.$$

Offenbar ist das ein Kreisring mit innerem Radius $\sqrt{2}$ (dieser innere Kreis gehört noch zu der Menge) und äußerem Radius $\sqrt{3}$ (dieser äußere Kreis gehört nicht mehr zu der Menge).

$$(b) f^{-1}((-\infty, 0)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \underbrace{x^2 + y^2}_{\geq 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2} \in (-\infty, 0)\} = \emptyset.$$

8. Prüfen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

- (a) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto x^2$,
- (b) $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, x \mapsto x^2$,
- (c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x$,
- (d) $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, 1 \mapsto 2, x \mapsto x - 1$ für $x > 1$,
- (e) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x - 1$.

Lösung. (a) f nicht injektiv, da z.B. $f(-1) = f(1)$ und auch nicht surjektiv: $2 \in \mathbb{N}_0$ ist nicht im Bild von f .

(b) f ist auf dem angegebenen Definitionsbereich injektiv, d.h.: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, aber nicht surjektiv (siehe (a)).

(c) f ist injektiv und surjektiv, denn:

Injektivität: Es seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$ gegeben. Angenommen, $x \neq y$, und ohne Einschränkung sei $x < y$. Dann gilt auch $x^3 < y^3$ und folglich $x^3 + x < y^3 + y$. Somit gilt $f(x) < f(y)$. Widerspruch! Gezeigt ist: $x = y$. Somit ist f injektiv.

Surjektivität: Für den Nachweis der Surjektivität nutzen wir Schulwissen: Die Funktion f nimmt beliebig kleine Werte ($x \rightarrow -\infty$) und beliebig große Werte ($x \rightarrow \infty$) an. Weiter macht die Funktion keine Sprünge (sie ist nämlich *stetig*). Folglich wird jede reelle Zahl als Wert angenommen (man zeichne sich auch mal den Graphen der Funktion).

Diese Abbildung f ist damit bijektiv.

(d) f offensichtlich surjektiv, aber nicht injektiv, da $f(1) = f(3) = 2$.

(e) f ist injektiv: Aus $f(x_1) = f(x_2)$ mit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ folgt sofort $x_1 = x_2$.

f ist auch surjektiv: Zu $y \in \mathbb{Z}$ wähle $x := y + 1 \in \mathbb{Z}$. Es gilt dann $f(x) = y$.

Diese Abbildung f ist damit bijektiv.

9. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

- (a) $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$,
- (b) $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$,
- (c) $f_3: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$.

Lösung. (a) Die Abbildung ist nicht injektiv: $f_1((2,2)) = f_1((1,3))$ und $(2,2) \neq (1,3)$.

Die Abbildung ist aber surjektiv: Wähle zu $y \in \mathbb{R}$ das Paar $(0, y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $f_1((0, y)) = y$.

(b) Die Abbildung ist nicht injektiv: $f_2((1,1)) = f_2((-1,1)) = 1 + 1 - 1 = 1$.

Die Abbildung ist auch nicht surjektiv: Die Elemente aus $] -\infty, -1[$ haben offenbar kein Urbild im \mathbb{R}^2 .

(c) Die Abbildung ist injektiv: Es seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $f_3((x_1, y_1)) = f_3((x_2, y_2))$ gegeben. Wir erhalten die Gleichungen:

I. $x_1 + 2y_1 = x_2 + 2y_2$,

II. $2x_1 - y_1 = 2x_2 - y_2$.

Hieraus erhalten wir:

I.+2·II.: $5x_1 = 5x_2$, also $x_1 = x_2$.

Und weiter:

2·I.-II.: $5y_1 = 5y_2$, also auch $y_1 = y_2$.

Zusammengefaßt: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Und somit ist f_3 injektiv.

Die Abbildung ist auch surjektiv: Es sei $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ beliebig. Gesucht ist ein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f((x, y)) = (a, b)$. Es muß also gelten:

I. $x + 2y = a$ und II. $2x - y = b$.

Wähle $x := a - 2y$. Eingesetzt in II. ergibt das: $y = \frac{1}{5}(2a - b)$, und daraus folgt $x = \frac{1}{5}(a + 2b)$. Es gilt nun $f_3((x, y)) = (a, b)$. Folglich ist f_3 surjektiv.

10. Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität und geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion an.

(a) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 3x + 4$,

(b) $g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto 3x + 4$.

Lösung. (a) Angenommen, $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \neq x_2$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Dann gilt $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$, also $3x_1 = 3x_2$, also $x_1 = x_2$ – ein Widerspruch. Die Abbildung ist also injektiv.

Die Abbildung f ist aber nicht surjektiv, da etwa das Element $5 \in \mathbb{Z}$ kein Urbild hat: Es müßte ein $x \in \mathbb{Z}$ geben mit $f(x) = 5$. Es wäre dann $3x + 4 = 5$, d. h. $3x = 1$. Diese Gleichung ist in \mathbb{Z} nicht lösbar.

(b) Die Abbildung g ist injektiv: Angenommen, es gibt $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}, x_1 \neq x_2$ mit $g(x_1) = g(x_2)$. Dann gilt $3x_1 + 4 = 3x_2 + 4$, also $3x_1 = 3x_2$, also $x_1 = x_2$ – ein Widerspruch.

Die Abbildung g ist auch surjektiv: Es sei $y \in \mathbb{Q}$. Wir suchen ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $g(x) = y$: Wähle $x = \frac{y-4}{3}$, dann gilt offenbar das Gewünschte.

Die Umkehrabbildung lautet:

$$g^{-1}(x) = \frac{x-4}{3}.$$