

Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

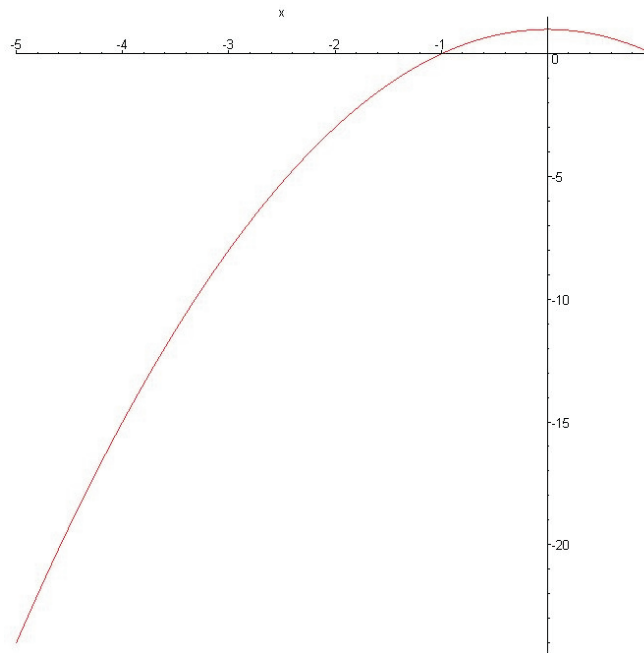
1. Zeichnen Sie die Graphen folgender Funktionen und entscheiden Sie anhand dieser, ob die Funktionen umkehrbar sind. Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrabbildung an.

(a) $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1], x \mapsto -x^2 + 1$.

(b) $f: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 1], x \mapsto -x^2 + 1$.

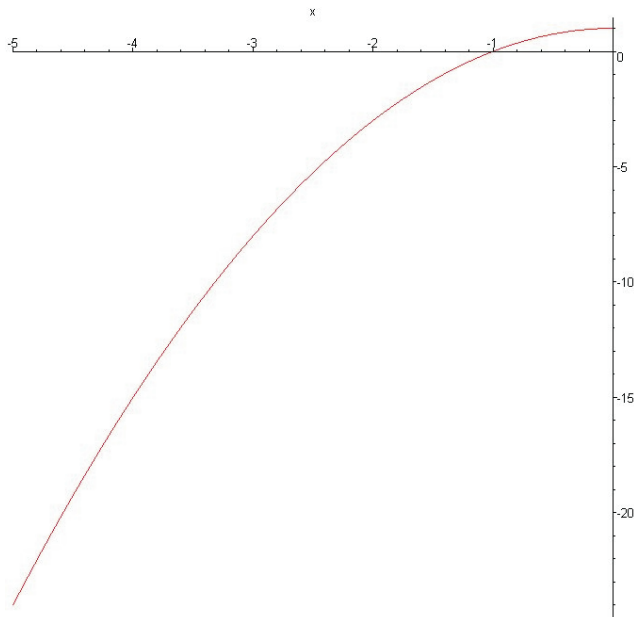
(c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \{1\}, x \mapsto 1$.

Lösung. (a) Der Graph der Funktion:



Offenbar ist die Funktion nicht injektiv. Folglich ist die Funktion nicht umkehrbar.

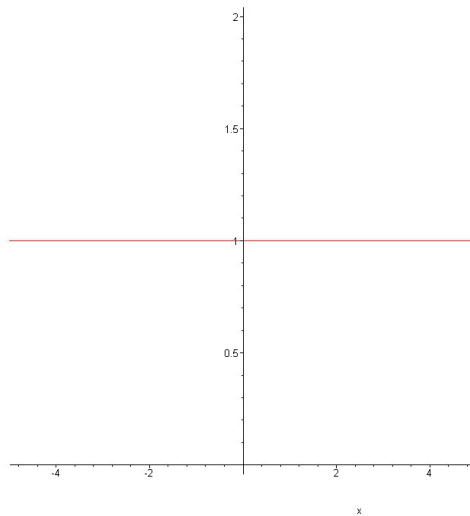
(b) Der Graph der Funktion:



Die Funktion ist bijektiv und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion ist offenbar

$$f^{-1} : (-\infty, 1] \rightarrow (-\infty, 0]; x \mapsto -\sqrt{-x+1}.$$

(c) Der Graph der Funktion:



Die Funktion ist nicht injektiv, also existiert keine Umkehrabbildung.

2. (a) Dividieren Sie das Polynom $p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$ durch das Polynom $q(x) = x^2 - x - 1$.

(b) Dividieren Sie das Polynom $p(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 + x^2 - x - 2$ durch das Polynom $q(x) = x^2 + x + 1$

Lösung. (a) Es gilt $p(x) = q(x)(x^3 + 2x^2 - x + 2)$.

(b) Es gilt $p(x) = q(x)(x^3 - 5x + 6) - 2x - 8$.

3. Zerlegen Sie die folgenden Polynome in Linearfaktoren (d.h. in ein Produkt von Polynomen vom Grad 1):

(a) $p(x) = x^3 - 2x - 1$,

(b) $q(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$,

(c) $r(x) = x^4 - 6x^2 + 7$.

Lösung. Auswerten der Polynome an Stellen wie 0, 1, -1 und/oder quadratische Ergänzung liefert Nullstellen. Durch Polynomdivision lassen sich die Polynome dann in Faktoren zerlegen.

(a) $p(x) = (x+1)(x^2 - x - 1) = (x-1)(x - \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}))(x - \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}))$.

(b) $q(x) = (x-1)(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = (x-1)^2(x^2 - x - 6) = (x-1)^2(x+2)(x-3)$.

(c) Mit der Substitution $u = x^2$ ergibt sich eine quadratische Gleichung für u :

$$u^2 - 6u + 7 = (u - 3)^2 - 2 = 0.$$

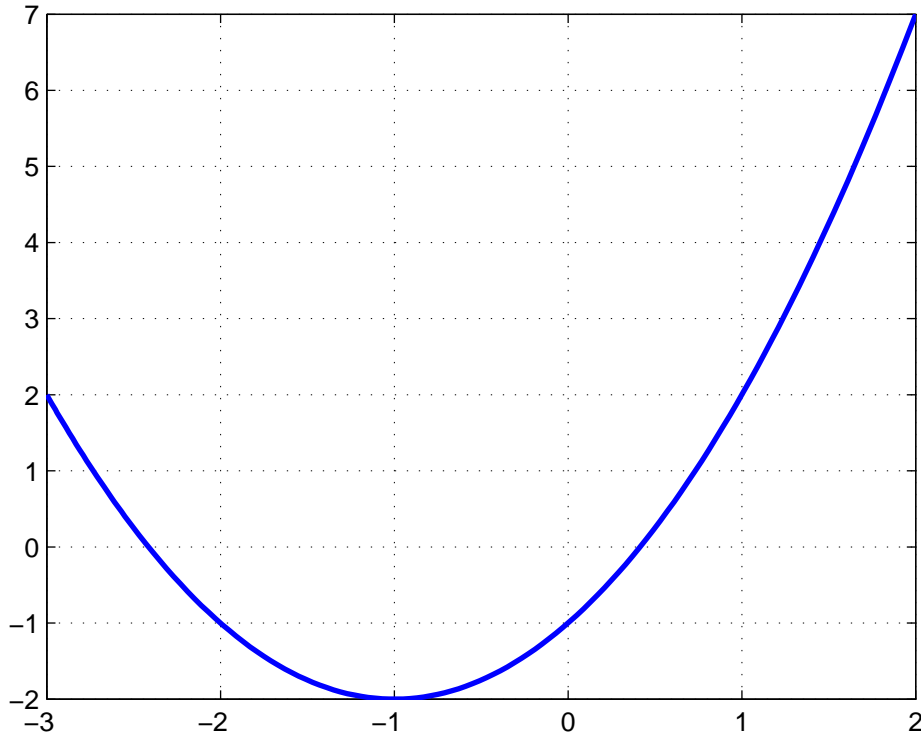
Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind durch $u = 3 \pm \sqrt{2}$ gegeben. Für die vier Nullstellen bzw. die Faktorisierung des Polynoms $r(x)$ folgt somit

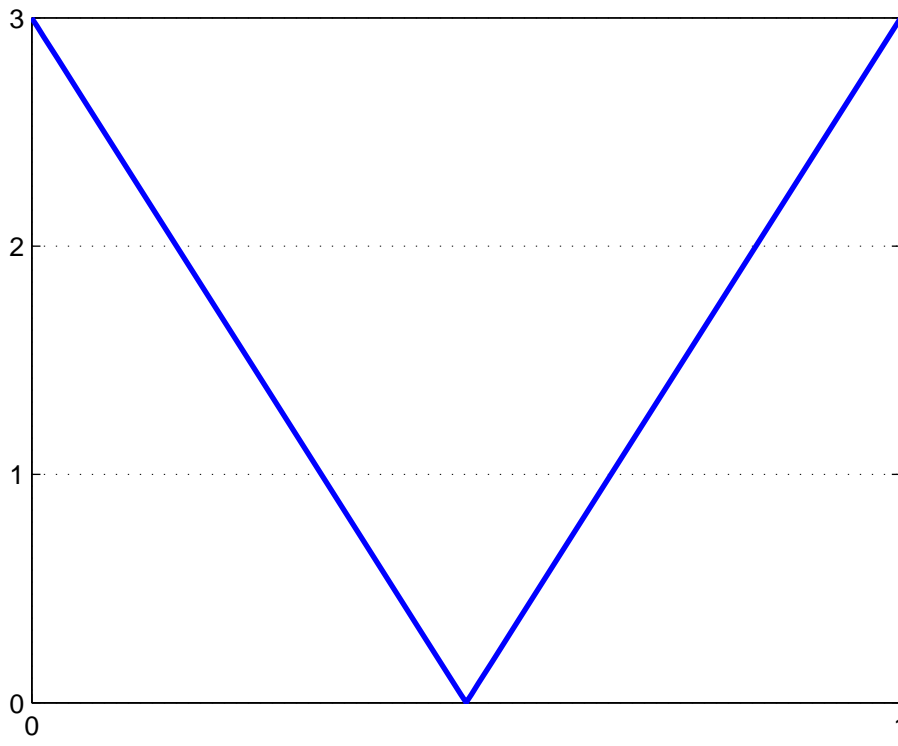
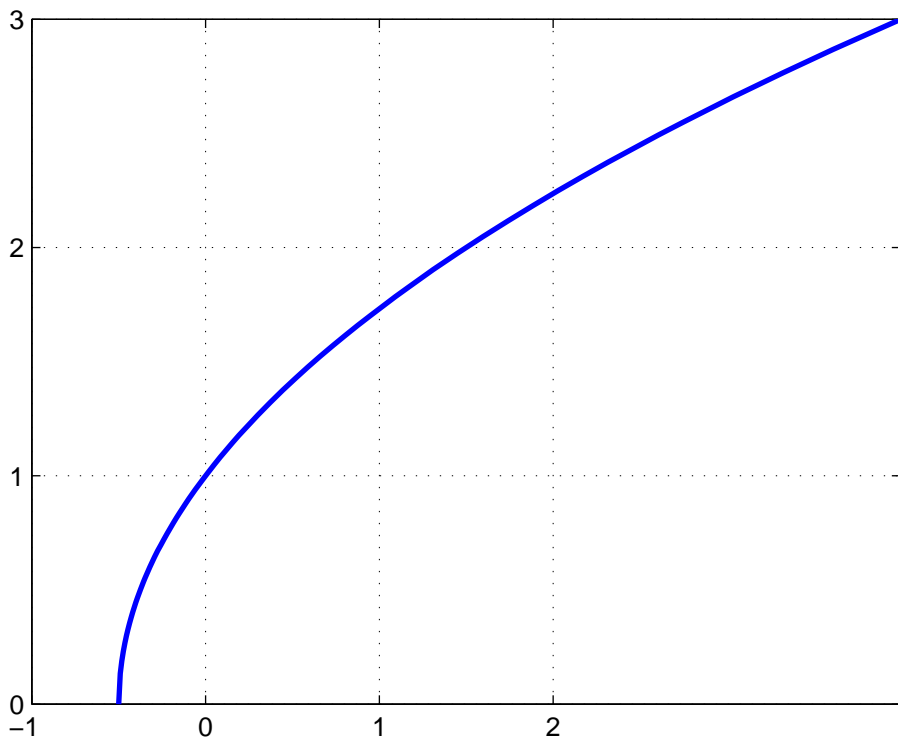
$$r(x) = (x + \sqrt{3 + \sqrt{2}})(x - \sqrt{3 + \sqrt{2}})(x + \sqrt{3 - \sqrt{2}})(x - \sqrt{3 - \sqrt{2}})$$

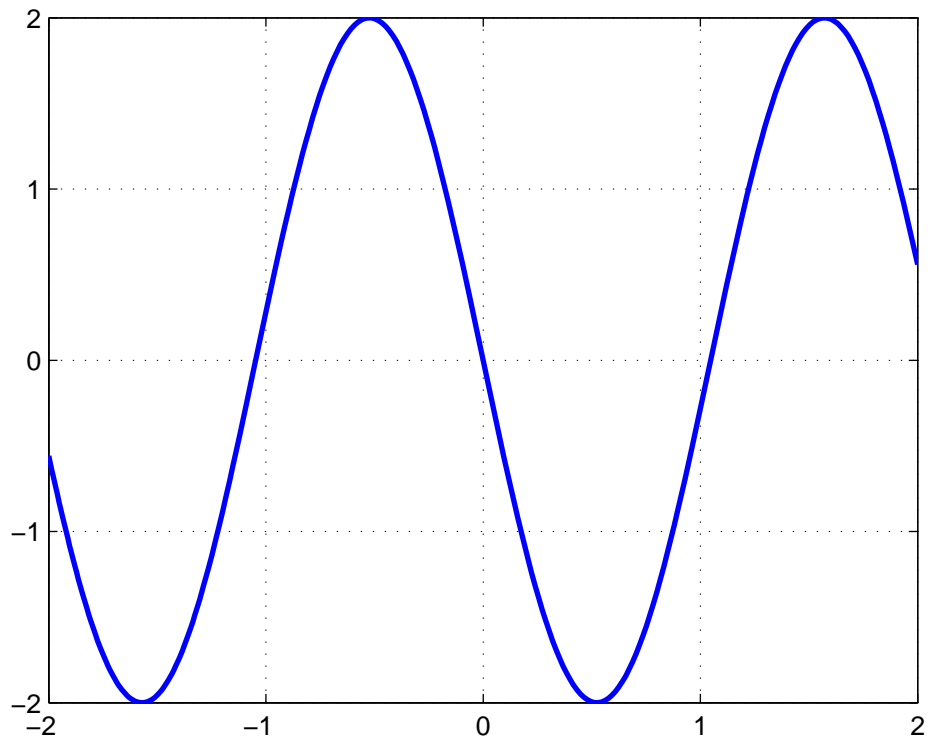
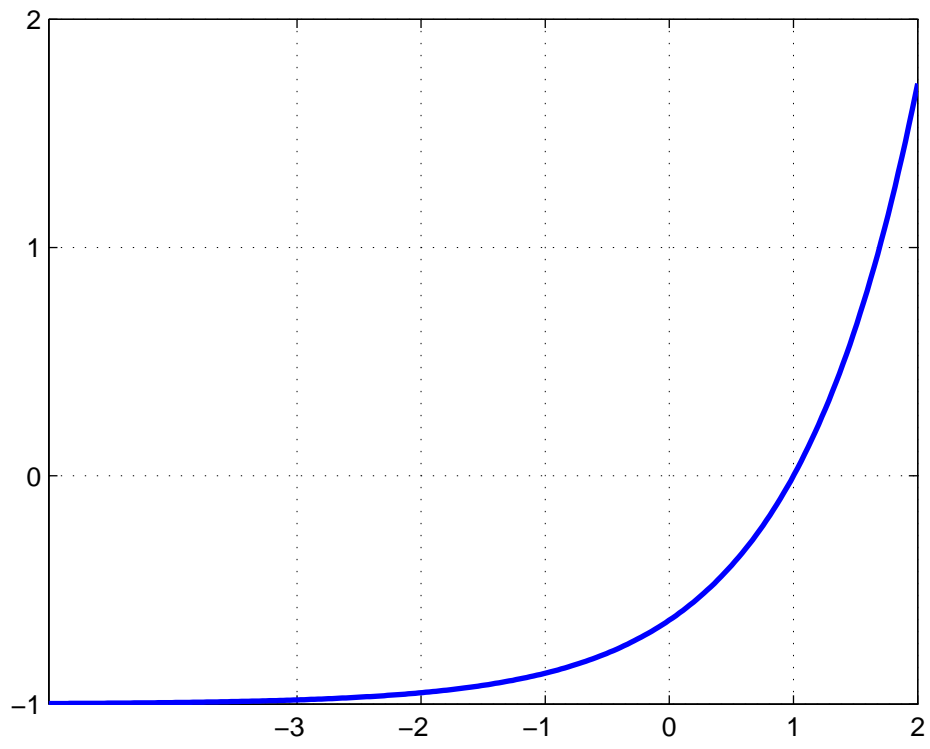
4. Skizzieren Sie grob ohne einen graphikfähigen Rechner die Graphen der folgenden Funktionen:

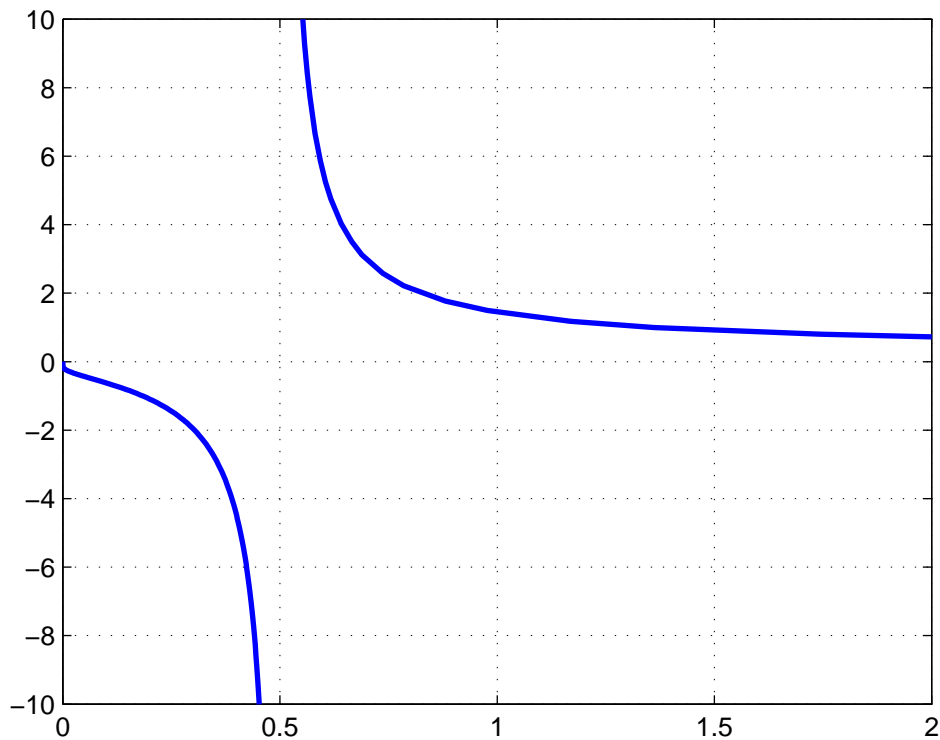
$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x+1)^2 - 2, & f_2(x) &= \sqrt{2x+1} \\ f_3(x) &= 3|2x-1|, & f_4(x) &= e^{x-1} - 1 \\ f_5(x) &= 2\sin(3x - \pi), & f_6(x) &= 1/(\ln(2x)) \end{aligned}$$

Lösung. Wir machen den Gedankengang beim Skizzieren des Graphen zu f_1 deutlich. Zunächst erinnern wir uns an die Normalparabel, also den Graphen zu $f(x) = x^2$. Wegen des Terms $(x+1)$ wird dieser Graph um 1 nach links (!) verschoben. Außerdem wird noch 2 abgezogen, so daß der Graph um diesen Wert nach unten zu verschieben ist. Insgesamt erhalten wir die Kurve als Graph zu f_1 . Bei den anderen Abbildungen verfähre man analog. Hier sind die Graphen der Reihe nach:









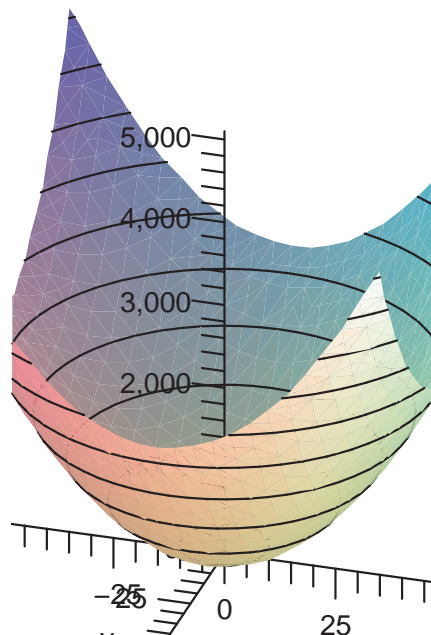
5. Beschreiben Sie den Graphen der Abbildung:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Lösung. Offenbar ist für jedes $r > 0$ die Teilmenge

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r\}$$

des \mathbb{R}^2 ein Kreis mit Radius \sqrt{r} (Satz von Pythagoras). Daher sind die Schnittmengen des Graphen von f mit den zur x - y -Ebene parallelen Ebenen (aber nur im positiven Halbraum, also für positive z -Koordinaten) Kreise. Diese Kreise werden größer, je höher diese Ebenen sind. Wegen $f(0,0) = 0$ ist der Graph also eine „rotierende“ Normalparabel:



6. Welche der beiden Zahlen π^e oder e^π ist die größere?

Hinweis: Verwenden Sie die für alle $x \in \mathbb{R}$ geltende Ungleichung $1 + x \leq e^x$.

Lösung. Aus der angegebenen Ungleichung folgt

$$e^{\frac{\pi}{e}-1} > 1 + \frac{\pi}{e} - 1 = \frac{\pi}{e}.$$

Also ist

$$e^{\frac{\pi}{e}} > \pi.$$

Potenzieren wir die letzte Ungleichung mit e , so folgt die gesuchte Relation

$$e^\pi > \pi^e.$$

7. Begründen Sie die *Monotonie* der Logarithmusfunktion, das heißt, es gilt

$$\ln x < \ln y \quad \text{für } 0 < x < y.$$

Lösung. Es gilt mit den charakterisierenden Eigenschaften des Logarithmus für $x, y > 0$ die Abschätzung

$$\frac{x}{y} - 1 \geq \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y.$$

Es folgt mit $x < y$ bzw. $x/y < 1$ die Abschätzung

$$\ln x \leq \ln y + \underbrace{\frac{x}{y} - 1}_{< 0} < \ln y.$$

8. Berechnen Sie folgende Zahlen ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners:

$$\sqrt{e^{3 \ln 4}}, \quad \frac{\sqrt{x} e^{(2+x)^2 - 4}}{e^x}$$

mit $x > 0$.

Lösung. Es gilt

$$\sqrt{e^{3 \ln 4}} = \left(e^{\ln 4} \right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8.$$

Für das zweite Beispiel ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} e^{(2+x)^2 - 4}}{e^x} &= e^{\frac{(2+x)^2 - 4}{x} - x} \\ &= e^{\frac{x^2 + 4x + 4 - 4 - x^2}{x}} = e^4. \end{aligned}$$

9. Vereinfachen Sie für $x, y, z \in \mathbb{R}_{>0}$ die Ausdrücke:

(a) $\ln(2x) + \ln(2y) - \ln z - \ln 4$.

(b) $\ln(x^2 - y^2) - \ln(2(x - y))$ ($x > y$).

(c) $\ln(x^{\frac{2}{3}}) - \ln(\sqrt[3]{x^{-4}})$.

Lösung. Mit der Funktionalgleichung $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ bzw. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ folgt im Fall (a)

$$\begin{aligned}\ln(2x) + \ln(2y) - \ln z - \ln 4 \\ &= \ln 2 + \ln x + \ln 2 + \ln y - \ln z - 2\ln 2 \\ &= \ln x + \ln y - \ln z \\ &= \ln\left(\frac{xy}{z}\right).\end{aligned}$$

Weiter gilt für (b)

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - y^2) - \ln(2(x - y)) \\ &= \ln((x + y)(x - y)) - \ln 2 - \ln(x - y) \\ &= \ln(x + y) - \ln 2.\end{aligned}$$

Für Teil (c) ergibt sich

$$\ln(x^{\frac{2}{3}}) - \ln(\sqrt[3]{x^{-4}}) = \frac{2}{3}\ln x + \frac{4}{3}\ln x = 2\ln x.$$

10. Eine Aufgabe zum Thema „Quantoren“ – für Freaks.

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, D ein Intervall. Man definiert: Die Funktion f ist:

$$\text{stetig auf } D : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \forall x \in D \exists \delta > 0 : \forall x' \in D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

$$\text{gleichmäßig stetig auf } D : \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \forall x' \in D : |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Wodurch unterscheidet sich die gleichmäßige Stetigkeit von der Stetigkeit? – machen Sie Bilder! Können Sie eine Funktion angeben, die stetig und nicht gleichmäßig stetig ist?

Lösung. Bei der gleichmäßigen Stetigkeit hängt das δ nicht von x ab, es gibt hier ein *universelles* δ , das für ganz D taugt.

Beispiel für eine stetige und nicht gleichmäßig stetige Funktion: $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$.