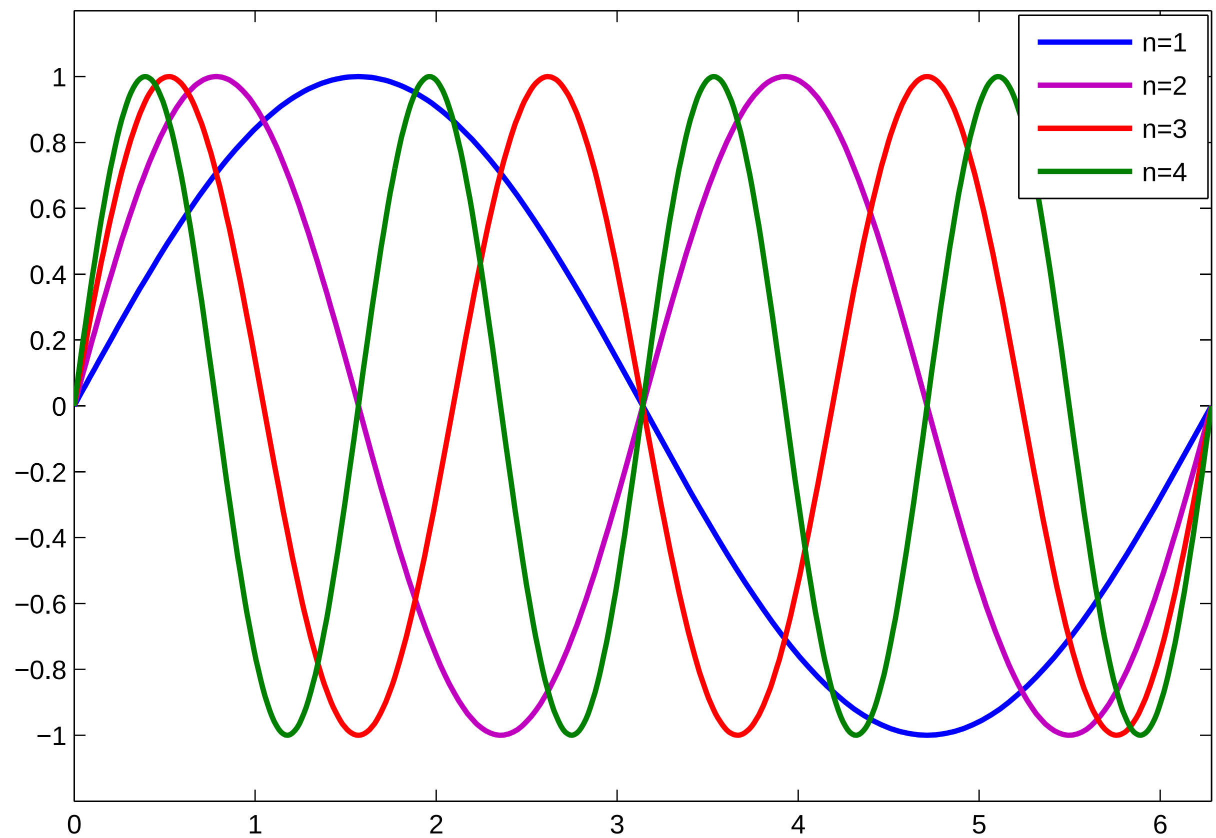
Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. (a) Zeichen Sie die Graphen von $\sin(nx)$ für $x \in [0, 2\pi]$ und $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ in ein gemeinsames Diagramm.

(b) Geben Sie ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners die Wertetabellen von $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ und $h(x) = \tan(x)$ für $x \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ an.

Lösung.
(a)



(b)

x	$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = \cos(x)$	$h(x) = \tan(x)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	nicht definiert
π	0	-1	0

2. Folgern Sie aus den Additionstheoremen:

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y)\,.$$

Lösung:
Nach den Additionstheoremen gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sin(x-y) + \frac{1}{2}\sin(x+y) &= \frac{1}{2}\Big(\big(\sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\big) + \big(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)\big)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\big(2\sin(x)\cos(y)\big)\\ &= \sin(x)\cos(y)\end{aligned}$$

3. Zeigen Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Identität:

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} &= \frac{\tan(y)}{\sqrt{1+\tan^2(y)}} \quad \text{mit } y = \arctan(x),\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\\ &= \frac{\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{\sqrt{1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}} = \frac{\sin(y)}{\cos(y)\cdot\sqrt{1+\frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}}\\ &= \frac{\sin(y)}{\sqrt{\cos^2(y)+\sin^2(y)}} = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1}}\\ &= \sin(y) = \sin\big(\arctan(x)\big)\,.\end{aligned}$$

4. Verifizieren Sie für $x \in (-\pi, \pi)$ die Identitäten

(a) $\cos x = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$, (b) $\sin x = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$, (c) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos(2x)$.

Lösung:
Unter Verwendung der bekannten Formeln erhält man:

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} &= \frac{1-\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\\ &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos(x)}{2} - \frac{1-\cos(x)}{2} = \cos(x)\,.\end{aligned}$$

(b)

$$\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(1+\frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)} = 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
$$= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\right)+\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \sin(x)\,.$$

(c)

$$\cos^4(x)-\sin^4(x) = \left(\cos^2(x)-\sin^2(x)\right)\cdot\left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right) = \cos^2(x)-\sin^2(x)$$
$$= \frac{1+\cos(2x)}{2} - \frac{1-\cos(2x)}{2} = \cos(2x)\,.$$

5. Wenden Sie das Newton-Verfahren auf die Gleichung

$$\tan\frac{x}{4} - \cot\frac{x}{4} = 0$$

an, um die Zahl π auf zehn Nachkommastellen genau zu bestimmen.

Lösung:
Nach der Vorlesung lautet die Newton-Iteration zur approximativen Bestimmung einer Nullstelle von f

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Wir berechnen nun Zähler und Nenner dieses Ausdrucks:

$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{4}\right) - \cot\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{\sin(x/4)}{\cos(x/4)} - \frac{\cos(x/4)}{\sin(x/4)} = \frac{\sin^2(x/4)-\cos^2(x/4)}{\sin(x/4)\cos(x/4)} = -2\,\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}$$

$$f'(x) = -2\,\frac{-1/2\sin^2(x/2) - 1/2\cos^2(x/2)}{\sin^2(x/2)} = \frac{1}{\sin^2(x/2)}$$

Es ist also

$$\frac{f(x)}{f'(x)} = -2\,\frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)}\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = -2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin(x)$$

Beginnen wir mit einem Startwert $x_0 = 3$ (π ist ungefähr 3), dann erhalten wir aus $x_{n+1} = x_n + \sin(x_n)$:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 3 \\
x_1 &= 3+\sin(3) \approx \mathbf{3{,}141}2000805 \\
x_2 &= 3+\sin(3)+(3+\sin(3)) \approx \mathbf{3.1415926535}7
\end{aligned}$$

Dies vergleichen wir mit der Zahl

$$\pi \approx 3.14159265359$$

Nur zwei Iterationen nach $x_0 = 3$ liefern also bereits einen Fehler von der Größe

$$\pi - x_3 \approx 2\cdot 10^{-11}\,.$$

6. Bestimmen Sie näherungsweise die positive Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^2 - 2$$

mit

(a) dem Newton-Verfahren mit Startwert 1.

(b) mit der Intervallhalbierungsmethode mit Startintervall $[1,2]$.

Lösung. (a) Mit $x_0 = 1$ erhält man:

$$x_1 = x_0 - \frac{p(x_0)}{p'(x_0)} = 1,5\,.$$

Und damit bereits

$$x_2 = x_1 - \frac{p(x_1)}{p'(x_1)} = 1,416.....$$

Rechnen Sie ruhig weiter.

(b) Wegen $p(1) < 0$ und $p(2) > 0$ liegt die Nullstelle zwischen 1 und 2. Es ist $1,5$ der Mittelpunkt des Intervalls.

Wegen $p(1,5) > 0$ liegt die Nullstelle zwischen 1 und $1,5$. Es ist $1,25$ der Mittelpunkt dieses Intervalls.

Wegen $p(1,25) < 0$ liegt die Nullstelle zwischen $1,25$ und $1,5$. Es ist $1,375$ der Mittelpunkt dieses Intervalls.

Wegen $p(1,375) < 0$ liegt die Nullstelle zwischen $1,375$ und $1,5$. Es ist $1,437$ der Mittelpunkt dieses Intervalls

Rechnen Sie ruhig noch etwas weiter.

7. Bestimmen Sie ein Polynom p vom Grad 3, das an den folgenden Stellen die dazugehörigen Werte annimmt:

x	-2	-1	0	1
$p(x)$	-3	-1	-1	3

Lösung. Wir könnten die Formel aus der Vorlesung für das Lagrangeinterpolationspolynom benutzen (das sollten Sie auch tun!). Wir führen hier ein anderes Verfahren durch:

Wir setzen die angegebenen Stellen in einen Ansatz der Form $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ein und erhalten dadurch das folgende lineare Gleichungssystem mit den Unbestimmten $a_0, \ldots, a_3$, das wir gleich lösen:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} -8 & 4 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Damit ist $p(x) = x^3 + 2x^2 + x - 1$.