Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. Bestimmen Sie zu den Zahlen $z_1 = 1+2\mathrm{i}$, $z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{2}$ und $z_3 = -2+\mathrm{i}$ Real- und Imaginärteil folgender Ausdrücke:

$$z_1^3 - 3z_1^2 + 2z_1\,, \quad \frac{z_1+z_3}{4z_2-z_3} \quad \text{und} \quad \frac{\overline{z}_3^2}{2z_1+2z_2+\mathrm{i}}\,.$$

Welche komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ erfüllt die Gleichung

$$z - 1 + 2\mathrm{i}\overline{z} - \mathrm{i} = 0\,?$$

Lösung. Für den ersten Ausdruck erhält man $-10\mathrm{i}$, also den Realteil 0 und Imaginärteil -10.

Für den zweiten Ausdruck erhält man $-\frac{13}{25} + \frac{9}{25}\mathrm{i}$, also den Realteil $-\frac{13}{25}$ und den Imaginärteil $\frac{9}{25}$.

Für den dritten Ausdruck erhält man 1, also den Realteil 1 und Imaginärteil 0.

Bei der letzten Gleichung setze man $z = a + b\mathrm{i}$, a, $b \in \mathbb{R}$. Man erhält ein lineares Gleichungssystem in a und b. Man erhält $a = \frac{1}{3}$ und $b = \frac{1}{3}$, also $z = \frac{1+\mathrm{i}}{3}$.

2. (a) Geben Sie zu folgenden komplexen Zahlen die Polarkoordinatendarstellung an:

$$z_1 = -2\mathrm{i}, \quad z_2 = 1+\mathrm{i}, \quad z_3 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})\,.$$

(b) Zu den komplexen Zahlen mit den Polarkoordinaten

$$r_4 = 2\,,\ \varphi_4 = \frac{1}{2}\pi, \quad r_5 = 1\,,\ \varphi_5 = \frac{3}{4}\pi, \quad r_6 = 3\,,\ \varphi_6 = \frac{5}{4}\pi$$

sind Real- und Imaginärteil gesucht.

Lösung. Die Zahl z_1 liegt auf der negativen imaginären Achse in der Zahlenebene. Somit ist das Argument $\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$. Mit dem Betrag $|z_1| = 2$ folgt die Polarkoordinatendarstellung

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{-1}{2}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{-1}{2}\pi\right)\,.$$

Die Zahl $z_2 = 1+\mathrm{i}$ liegt auf der Winkelhalbierenden in ersten Quadranten der Zahlenebene. Sie hat deswegen das Argument $\varphi_2 = \pi/4$. Mit

$$|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

erhalten wir die Polarkoordinatendarstellung

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Die Zahl $z_3 = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})$ liegt im zweiten Quadranten der Ebene und hat den Betrag

$$|z_3| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1.$$

Somit ist $r_3 = 1$ und etwa $\cos\varphi_3 = -1/2$. Aus einer Wertetabelle zu Cosinus und Sinus läßt sich der Winkel ablesen, zum Beispiel durch $-1/2 = -\sin(\pi/6) = \cos(\pi/6+\pi/2)$. Wir erhalten $\varphi_3 = \frac{2}{3}\pi$. Also ist

$$z_3 = \cos\frac{2}{3}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi .$$

Für z_4, z_5 und z_6 bestimmen wir etwa mit einer Wertetabelle zu Cosinus und Sinus den Realteil und den Imaginärteil der Zahlen:

$$\begin{aligned}
z_4 &= 2\left(\cos\frac{1}{2}\pi + \mathrm{i}\,\sin\frac{1}{2}\pi\right) &&= 2\,\mathrm{i}\,,\\
z_5 &= \cos\frac{3}{4}\pi + \mathrm{i}\,\sin\frac{3}{4}\pi &&= \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+\mathrm{i})\,,\\
z_6 &= 3\left(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\,\sin\frac{5}{4}\pi\right) &&= -\frac{3}{\sqrt{2}}(1+\mathrm{i})\,.
\end{aligned}$$

3. Berechnen Sie zu den komplexen Zahlen

$$z_1 = 1-\mathrm{i}\,,\; z_2 = 1+3\,\mathrm{i} \text{ und } z_3 = 2-4\,\mathrm{i}$$

die Real- und Imaginärteile der Ausdrücke

$$-z_1\;,\;\overline{z_1}\;,\;z_1\,z_2\;,\;\frac{z_2}{z_3}\;,\;\frac{z_1}{\overline{z_2}-z_1^2}\;,\;\frac{z_3}{2z_1-\overline{z_2}}\,.$$

Lösung. Mit der Definition einer komplexen Zahl und der konjugiert komplexen Zahl ist

$$-z_1 = -(1-\mathrm{i}) = -1+\mathrm{i} \quad \text{und} \quad \overline{z_1} = 1+\mathrm{i}\,.$$

Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned}
z_1\,z_2 &= (1-\mathrm{i})\,(1+3\mathrm{i}) = 1-3\mathrm{i}^2+(-1+3)\,\mathrm{i} \;=\; 4+2\,\mathrm{i}\frac{z_2}{z_3} = \frac{1+3\,\mathrm{i}}{2-4\,\mathrm{i}} = \frac{(1+3\,\mathrm{i})(2+4\,\mathrm{i})}{2^2+4^2}\\
&= \frac{1}{20}(2-12+(6+4)\,\mathrm{i}) = \frac{1}{2}(-1+\mathrm{i})\,.\\
\frac{z_1}{\overline{z_2}-z_1^2} &= \frac{1-\mathrm{i}}{(1-3\mathrm{i})-(1-\mathrm{i})^2} = \frac{1-\mathrm{i}}{(1-3\mathrm{i})-(-2\mathrm{i})} = \frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \;=\; 1\,.\\
\frac{z_3}{2z_1-\overline{z_2}} &= \frac{2-4\mathrm{i}}{2(1-\mathrm{i})-(1-3\mathrm{i})} = \frac{2-4\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{(2-4\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2} = \frac{1}{2}(-2-6\mathrm{i}) \;=\; -1-3\mathrm{i}\,.
\end{aligned}$$

4. Bestimmen Sie Real- und Imaginärteile der Lösungen folgender quadratischer Gleichungen:

(a) $z^2-4\,\mathrm{i}\,z+4z-8\,\mathrm{i} = 0$,

(b) $(z-(1+2\,\mathrm{i}))\,z = 3-\mathrm{i}$,

(c) $z^2+2\,(1+\mathrm{i})\,z = 1-3\,\mathrm{i}$.

Lösung. (a) Eine quadratische Ergänzung führt auf:

$$\begin{aligned}
z^2-4\mathrm{i}z+4z-8\mathrm{i} = z^2+(4-4\mathrm{i})z-8\mathrm{i} &= (z+(2-2\mathrm{i}))^2-(2-2\mathrm{i})^2-8\mathrm{i}\\
&= (z+(2-2\mathrm{i}))^2+8\mathrm{i}-8\mathrm{i} = (z+(2-2\mathrm{i}))^2\,.
\end{aligned}$$

Also sind beide Nullstellen durch

$$z_1 = z_2 = -2+2\mathrm{i}$$

gegeben.

(b) Auch im zweiten Beispiel betrachten wir die quadratische Ergänzung und erhalten

$$z^2-(1+2\mathrm{i})z-3+\mathrm{i}=\left(z-\frac{1+2\mathrm{i}}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(1+2\mathrm{i})^2-3+\mathrm{i}=\left(z-\frac{1+2\mathrm{i}}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\;=\;0\,.$$

Also ist

$$z-\frac{1+2\mathrm{i}}{2}=\pm\frac{3}{2}$$

und wir erhalten die beiden Lösungen

$$z_1=2+\mathrm{i}\quad\text{und}\quad z_2=-1+\mathrm{i}\,.$$

(c) Mit quadratischer Ergänzung ist

$$z^2+2(1+\mathrm{i})z-1+3\mathrm{i}=(z+(1+\mathrm{i}))^2-(1+\mathrm{i})^2-1+3\mathrm{i}=(z+(1+\mathrm{i}))^2-1+\mathrm{i}\,.$$

Wir benötigen also die Wurzeln

$$w^2=1-\mathrm{i}\,.$$

Mit $w=x+\mathrm{i}y$, $x,y\in\mathbb{R}$ ergibt sich

$$x^2-y^2+2xy\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$$

Vergleichen wir die Real- und die Imaginärteile separat, so liefert ein Vergleich die beiden Gleichungen

$$x^2-y^2=1\quad\text{und}\quad 2xy=-1\,.$$

Also ist $x=-1/(2y)$ und Einsetzen führt auf

$$\frac{1}{4y^2}-y^2=1$$

bzw.

$$y^4+y^2-\frac{1}{4}=(y^2+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=0$$

mit den Lösungen

$$y_\pm^2=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Da $y\in\mathbb{R}$ vorausgesetzt ist, bleibt nur die positive Lösung:

$$y=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-2}$$

Außerdem wissen wir, daß $x=-1/(2y)$. Also gilt

$$x=-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}$$

Damit sind die beiden Wurzeln $w=x+\mathrm{i}y$ und $w=-(x+\mathrm{i}y)$ gegeben. Für die beiden Lösungen der ursprünglichen quadratischen Gleichung folgt

$$z_\pm=-(1+\mathrm{i})\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}}-\mathrm{i}\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right)\,.$$

5. Welche Menge von Punkten in der komplexen Ebene wird durch die Gleichung

$$M = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z-3| = 2|z+3|\}$$

beschrieben?

Lösung. Aus

$$(z-3)(\bar{z}-3) = |z-3|^2 = 4|z+3|^2 = 4(z+3)(\bar{z}+3)$$

erhalten wir die Gleichung

$$|z|^2 - 3z - 3\bar{z} + 9 = 4|z|^2 + 12z + 12\bar{z} + 36$$

bzw.

$$|z|^2 + 5z + 5\bar{z} + 9 = 0\,.$$

Somit gilt für Zahlen $z \in M$ die Beziehung

$$|z+5|^2 = 16\,.$$

Also folgt

$$z \in K = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+5| = 4\}\,.$$

Andererseits ergibt sich durch dieselbe Rechnung, daß $z \in K$ auch $z \in M$ impliziert. Somit haben wir gezeigt, daß $M = K$ ist. Die Menge beschreibt den Kreis mit Radius 4 um den Mittelpunkt $-5 \in \mathbb{C}$.

6. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(x) := \sqrt{x}$. Bestimmen Sie folgende Mengen:

(a) $f^{-1}(\{\mathrm{i}\})$.

(b) $f([-2,2])$.

(c) $f^{-1}(\{a+bi \mid a, b \in (\mathbb{R}\setminus 0)\})$.

(d) $f(\mathbb{R})$.

Lösung.

(a) $f^{-1}(\{\mathrm{i}\}) = \{-1\}$.

(b) $f([-2,2]) = [0,\sqrt{2}] \cup [0,\sqrt{2}]\,\mathrm{i} = [0,\sqrt{2}] \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = b\mathrm{i}, b \in [0,\sqrt{2}]\}$

(c) $f^{-1}(\{a+b\mathrm{i} \,|\, a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\}) = \emptyset$.

(d) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}_{>0} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{z \in \mathbb{C} \,|\, z = b\mathrm{i},\, b \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

7. Skizzieren Sie die folgenden Punktmengen:

(a) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z+\mathrm{i}| \leq 3\}$.

(b) $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(\bar{z}-\mathrm{i}) = z\}$.

Lösung.

(a) $|z+\mathrm{i}| \leq 3$ liefert einen ausgefüllten Kreis um $-\mathrm{i}$ mit Radius 3.

(b) $\mathrm{Re}(\bar{z}-i) = z$ impliziert $z \in \mathbb{R}$. Da alle $x \in \mathbb{R}$ diese Gleichung erfüllen, handelt es sich hier um die gesamte reelle Achse.

8. Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $(\sqrt{3}+\mathrm{i})^{100}$.

Lösung:

$z=\sqrt{3}+i \Rightarrow r=\sqrt{3+1}=2,\ \varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6} \Rightarrow z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Nach Vorlesung gilt:

$$\begin{aligned}
z^{100} &= 2^{100}\left(\cos\left(100\cdot\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(100\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right)\\
&= 2^{100}\left(\cos\left(50\cdot\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(50\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= 2^{100}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi+16\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi+16\pi\right)\right)\\
&= 2^{100}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right)\\
&= 2^{100}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow Re\left(z^{100}\right)=-2^{99},\ Im\left(z^{100}\right)=\sqrt{3}\cdot 2^{99}$.

9. Berechnen Sie die komplexen Wurzeln:

(a) $\sqrt{-2\mathrm{i}}$ (b) $\sqrt[3]{-8}$ (c) $\sqrt{8\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right)}$

Lösung:

Nach Vorlesung gilt für $z=r\left(\cos(\varphi)+\mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$ und einen Exponenten $t\in\mathbb{R}$ die Formel

$$z^t=r^t\left(\cos(t\cdot\varphi)+\mathrm{i}\sin(t\cdot\varphi)\right).$$

(a) $z=-2\mathrm{i}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right)$
Es seien nun a_0 und a_1 die komplexen Wurzeln von z, also $a_0^2=a_1^2=-2\mathrm{i}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \sqrt{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\\
&= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)^{1/2}\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1-\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sqrt{2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right)}\\
&= \left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi\right)\right)\right)^{1/2}\\
&= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-1+\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

(b) $z=-8=8\left(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\right)=8\left(\cos(3\pi)+\mathrm{i}\sin(3\pi)\right)=8\left(\cos(5\pi)+\mathrm{i}\sin(5\pi)\right)$

$$a_0=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+\sqrt{3}\mathrm{i}$$

$$a_1=\sqrt[3]{8}\left(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi)\right)=2\left(-1+\mathrm{i}\cdot 0\right)=-2$$

$$a_2=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-\sqrt{3}\mathrm{i}$$

(c) $z = 8\left(1-\sqrt{3}\mathrm{i}\right) = 16\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 16\left(\cos\left(-\frac{7}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{7}{3}\pi\right)\right)$

$$a_0 = \sqrt{16}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$$

$$a_1 = \sqrt{16}\left(\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)\right) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{3}+2\mathrm{i}\,.$$

10. Begründen Sie: Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|\,.$$

Lösung. Mit der Dreiecksungleichung gilt

$$|z_1| = |(z_1 - z_2) + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|\,.$$

Bringt man nun $|z_2|$ auf die andere Seite, so erhält man das gewünschte Ergebnis.