

Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. Gegeben seien die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Mengen jeweils, ob sie linear abhängig sind:

- i. $\{x_1, x_2, x_3\}$,
- ii. $\{x_1, x_2, x_4\}$,
- iii. $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,
- iv. $\{x_2, x_3, x_4\}$,
- v. $\{x_1 + x_2, x_3\}$.

(b) Für welche der Mengen aus Aufgabe (a) kann man $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination schreiben?

Ist die Darstellung eindeutig?

Lösung.

- (a) i. Aus $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ folgt der Reihe nach $b = 0$, $a = 0$, $c = 0$. Damit sind die Vektoren linear unabhängig.
- ii. Aus $ax_1 + bx_2 + cx_4 = 0$ folgt $a = 0$ und $b = -c = c$. Hieraus folgt $a = b = c = 0$. Damit sind die Vektoren linear unabhängig.
- iii. Vier Vektoren im \mathbb{R}^3 sind stets linear abhängig.
- iv. Aus $ax_2 + bx_3 + cx_4 = 0$ folgt $b = 0$ und $a = -c = c$. Hieraus folgt $a = b = c = 0$. Folglich sind die Vektoren linear unabhängig.
- v. Aus $a(x_1 + x_2) + bx_3 = 0$ folgt $a = 0$. Weiter gilt dann $b = 0$. Erneut sind die Vektoren damit linear unabhängig.

(b) Es funktioniert (eindeutig) für die Fälle i., ii. und iv., da drei linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^3 eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

Für den Fall iii. funktioniert es auch, da die Menge drei linear unabhängige Vektoren enthält (z.B. x_1, x_2, x_3) und somit ein Erzeugendensystem des \mathbb{R}^3 darstellt. Die Darstellung ist nicht eindeutig, da auch die Vektoren x_1, x_3, x_4 eine Basis bilden, es gilt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 8x_1 + 6x_3 + 3x_4 = 2x_1 + 3x_2.$$

Für den Fall v. funktioniert es nicht: Das Gleichungssystem $a(x_1 + x_2) + bx_3 = y$ ist nicht lösbar.

2. Schreiben Sie den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung. Wir suchen eine Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Offenbar ist $(0, 2, 1)$ die eindeutig bestimmte Lösung. Damit gilt

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Schreiben Sie $p = x^3$ als Linearkombination der folgenden Polynome:

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 1 + x, \quad p_3 = 1 + x + x^2, \quad p_4 = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Lösung. Offenbar gilt $p = p_4 - p_3$.

4. Sind die Funktionen $\text{Id}_{\mathbb{R}}$, \sin , \cos linear unabhängig?

Lösung. Wir prüfen die Funktionen auf lineare Unabhängigkeit: Es gelte für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$ax + b \sin x + c \cos x = 0.$$

Da dies insbesondere für $x = 0$ gilt, folgt aus $c = 0$ und damit weiter für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$ax + b \sin x = 0.$$

Da dies für $x = \pi$ gilt, folgt $a = 0$ und damit weiter für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$b \sin x = 0.$$

Da \sin nicht die Nullfunktion ist muß $b = 0$ gelten (oder setze $x = \frac{\pi}{2}$ ein).

Damit ist gezeigt, daß die drei Funktionen linear unabhängig sind.

5. Es seien folgende Vektoren im \mathbb{R}^2 gegeben:

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 19 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Schreiben Sie jeden dieser Vektoren als Linearkombination der Vektoren:

(a) $u := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) $u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v := \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es.

Lösung. Gesucht sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $au + bv = x$ bzw. $= y$ bzw. $= z$.

(a) Offenbar gilt: $x = u + 2v$, $y = 19v$, $z = -u + 6v$.

(b) Offenbar gilt $x = \frac{6}{5}u - \frac{1}{5}v$, $y = \frac{38}{5}u + \frac{19}{10}v$, $z = 2u + v$.

6. Gegeben seien folgende beiden Mengen von Vektoren:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Zeigen Sie, daß die Mengen linear unabhängig sind.
(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ an, so daß v nicht durch Elemente aus S_1 bzw. aus S_2 linear kombiniert werden kann.

Lösung.

- (a) Zu S_1 : Wir schreiben die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und bringen diese Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die beiden Vektoren (bzw. die Menge S_1) linear unabhängig (einfacher: Der zweite Vektor ist kein Vielfaches des ersten Vektors.)

Zu S_2 : Wir schreiben die Vektoren als Zeilen in eine Matrix und bringen diese Matrix auf Zeilenstufenform (wir führen in einem Schritt mehrere Umformungen durch):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit sind die drei Vektoren (bzw. die Menge S_2) linear unabhängig.

- (b) Weil der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu den beiden Vektoren aus S_2 linear unabhängig ist, kann dieser nicht von den beiden Vektoren aus S_2 als Linearkombination dargestellt werden. Analog gilt das für den gleichen Vektor und S_3 .

7. Gegeben seien jeweils zwei Vektoren v_1 und v_2 .

(a) $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(b) $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Beschreiben Sie das Erzeugnis $\langle v_1, v_2 \rangle$. In welcher geometrischen Beziehung befinden sich alle Linearkombinationen? Geben Sie die entsprechenden Koordinatengleichungen an.

Lösung.

- (a) Die Vektoren $w = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) liegen in einer Ebene durch den Ursprung.

Wir bestimmen die Koordinatengleichung dieser Ebene: $x_1 = 2\mu$ und $x_2 = \lambda + \mu$ und $x_3 = \lambda + \mu$. Also gilt für alle Elemente der Ebene $x_2 - x_3 = 0$. Das ist die Koordinatengleichung der Ebene.

(b) Die Vektoren $w = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) liegen in einer Ebene durch den Ursprung.

Wir bestimmen die Koordinatengleichung dieser Ebene: $x_1 = -\lambda + \sqrt{2}\mu$ und $x_2 = 2\lambda + \mu$ und $x_3 = \mu$. Also gilt für alle Elemente der Ebene $x_1 + \frac{1}{2}x_2 - (\frac{1}{2} + \sqrt{2})x_3 = 0$. Das ist die Koordinatengleichung der Ebene.

8. Wir betrachten die Menge

$$\mathbb{C}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Mit

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ z'_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} z_1 + z'_1 \\ z_2 + z'_2 \\ z_3 + z'_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \\ \lambda z_3 \end{pmatrix}$$

für $\lambda, z_k, z'_k \in \mathbb{C}, k \in \{1, 2, 3\}$ wird \mathbb{C}^3 zu einem (komplexen) Vektorraum.

Überprüfen Sie die Vektoren

$$\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

auf lineare Unabhängigkeit. Kann man den Vektor $\begin{pmatrix} 1+i \\ -i \\ 8 \end{pmatrix}$ als Linearkombination obiger drei Vektoren darstellen?

Lösung. Wir überprüfen die Vektoren auf lineare Unabhängigkeit: Aus

$$a \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

folgt

$$a = -\frac{1}{i}b = ib \quad \text{und} \quad c = ib \quad \text{und} \quad (1+i)b = a - c = ib - ib = 0,$$

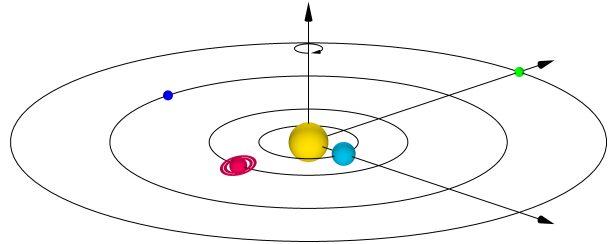
also $a = b = c = 0$.

Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig und jeder Vektor des \mathbb{C}^3 kann als Linearkombination dargestellt werden.

9. *Der Schwerpunkt des Sonnensystems.* In der Tabelle sind die ungefähren Massen der Planeten und ihre genäherten Abstände von der Sonne angegeben.

Bestimmen Sie den ungefähren Schwerpunkt des Sonnensystems. Berücksichtigen Sie hierzu vereinfachend nur die Sonne und die Planeten Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun. Gehen Sie weiter von einem ebenen Sonnensystem aus und tragen Sie Jupiter auf der positiven x_1 -Achse, Saturn auf der negativen x_2 -Achse, Uranus auf der negativen x_1 -Achse und schließlich Neptun auf der positiven x_2 -Achse auf.

	Masse in Erdmassen	Sonnenabstand in AE
Sonne	333000	0
Merkur	0.06	0.4
Venus	0.8	0.7
Erde	1	1
Mars	0.1	1.5
Jupiter	318	5
Saturn	95	10
Uranus	15	20
Neptun	17	30
Pluto	0.002	40



Lösung. Wir zeichnen die Planeten in ein Koordinatensystem ein, wobei die Sonne im Ursprung $\mathbf{0}$ liegt. Wir setzen Jupiter in den Punkt $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, Saturn in den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$, Uranus in den Punkt $\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Neptun in den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Nun setzen wir die Massen der entsprechenden Planeten in ihren Punkten in die Formel für den Schwerpunkt \mathbf{s} ein – die Gesamtmasse der fünf betrachteten Himmelskörper beträgt dabei 333445 Erdmassen:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \frac{1}{333445} \left(\begin{pmatrix} 1590 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -950 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -300 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 510 \end{pmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{333445} \begin{pmatrix} 1290 \\ -440 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tatsächlich liegt dieser Punkt in der Sonne.