

Vorkurs Höhere Mathematik

Lösungen zu den Aufgaben

1. Man bestimme, wo definiert, jeweils die Ableitung nach x :

- (a) $x^3 \sin x$, (d) \sqrt{xyz} ,
 (b) $\sin^3 x$, (e) $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$,
 (c) $\sin(x^3)$, (f) $\sqrt{x\sqrt{x}}$,

Lösung. (a) $\frac{d}{dx}(x^3 \sin x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x, x \in \mathbb{R}$.

(b) $\frac{d}{dx}(\sin^3 x) = 3 \sin^2 x \cos x, x \in \mathbb{R}$.

(c) $\frac{d}{dx}(\sin(x^3)) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, x \in \mathbb{R}$.

(d) $\frac{d}{dx}\sqrt{xyz} = \frac{1}{2\sqrt{xyz}} \cdot yz = \frac{\sqrt{xyz}}{2x}$, falls $xyz > 0$.

(e) $\frac{d}{dx}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \cdot \frac{-1(1+x)-1(1-x)}{(1+x)^2} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)^3}}$, für $-1 < x < 1$.

(f) $\frac{d}{dx}\sqrt{x\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x\sqrt{x}}} \cdot \left(\sqrt{x} + x \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{3\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sqrt{x}}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{x}}$, einfacher: $\frac{d}{dx}\sqrt{x\sqrt{x}} = \frac{d}{dx}(x^{3/4}) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$, jeweils für $x > 0$.

2. Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

(a) $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2, x \neq 0$,

(b) $f(x) = \cos(x^2) \cos^2 x, x \in \mathbb{R}$,

(c) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right), x \neq 0$,

auf dem jeweiligen Definitionsbereich der Funktion.

Lösung. (a) Wir fassen den Ausdruck zu f als Verkettung von y^2 und $y + \frac{1}{y}$ auf und nutzen die Kettenregel. Somit folgt

$$f'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 2\left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) = 2\left(x - \frac{1}{x^3}\right).$$

(b) Im nächsten Beispiel wenden wir die Produktregel an, und bei den Faktoren $\cos(x^2)$ und $\cos^2 x$ ist die Kettenregel angebracht. Insgesamt errechnen wir

$$f'(x) = (\cos(x^2) \cos^2 x)' = -2x \sin(x^2) \cos^2 x - 2 \cos(x^2) \cos x \sin x.$$

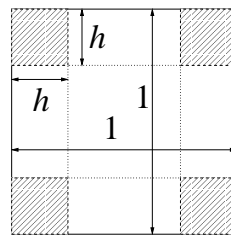
(c) Den dritten Term schreiben wir um zu

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right) = \ln(e^x-1) - \ln(e^x) = \ln(e^x-1) - x$$

und bilden die Ableitung unter Nutzung der Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{e^x-1} e^x - 1 = \frac{1}{e^x-1}.$$

3. Aus einer quadratischen Blechplatte mit Seitenlänge 1 werden an den vier Ecken jeweils gleich große Quadrate mit Seitenlänge h weggeschnitten. Aus dem verbleibendem kreuzförmigen Stück soll eine oben offene Wanne mit maximalem Volumen geformt werden.



Warum muss $h = \frac{1}{6}$ gewählt werden? Begründen Sie, daß bei $h = \frac{1}{6}$ ein lokales Maximum des Volumens ist.

Lösung. Das Volumen der Wanne ist

$$V(h) = (1 - 2h)^2 h = 4h^3 - 4h^2 + h,$$

mit $0 \leq h \leq \frac{1}{2}$. Es gilt

$$V'(h) = 12h^2 - 8h + 1.$$

Die Ableitung ist also gleich Null an den Stellen

$$h_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{24} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6},$$

also $h_1 = \frac{1}{6}$, $h_2 = \frac{1}{2}$.

Man erkennt, daß $V : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist. Damit gibt es (mindestens) ein globales Maximum. Außerdem ist V differenzierbar. Wegen der Differenzierbarkeit sind die einzigen Kandidaten für die Position des globalen Maximums die Ränder 0 und $\frac{1}{2}$ und Punkte mit verschwindender Ableitung in $]0, \frac{1}{2}[$, also h_1 . Wegen $V(0) = 0$, $V(\frac{1}{2}) = 0$ und $V(\frac{1}{6}) = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$ liegt das globale Maximum also bei $\frac{1}{6}$. Es folgen drei Begründungen:

- Bei $h = \frac{1}{6}$ ist ein lokales Maximum, da jedes globale Maximum auch ein lokales ist.
- (*lokale Maxima ohne 2. Ableitung*) Der Graph von $V'(h)$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{2}$, also ist $V'(h) > 0$ für $h \in]0, \frac{1}{6}[$ und $V'(h) < 0$ für $h \in]\frac{1}{6}, \frac{1}{2}[$, somit ist h_1 ein lokales Maximum und h_2 ein lokales Minimum von $V(h)$.
- (*lokale Maxima mit 2. Ableitung*) Es gilt $V''(h) = 24h - 8 = 8(3h - 1)$, $V''(\frac{1}{6}) = -4$, also lokales Maximum bei $h = \frac{1}{6}$, $V''(\frac{1}{2}) = +4$, also lokales Minimum bei $h = \frac{1}{2}$.

4. Man bestimme die folgenden unbestimmten Integrale:

- (a) $\int x \sin x \, dx$,
 (b) $7 \int \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx$,
 (c) $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} \, dx$.

Lösung. (a)

$$I = \int x \sin x \, dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \sin x \quad v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

(b)

$$I = 7 \int \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx = 7 \int (x^{3/2})^{1/2} \, dx = 7 \int x^{3/4} \, dx = 7 \frac{x^{7/4}}{7/4} + C = 4x^{7/4} + C.$$

(c) Wir erhalten

$$I = \int \ln(x^2) \frac{1}{x^2} \, dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x^2) \quad u' = \frac{2x}{x^2} \\ v' = \frac{1}{x^2} \quad v = -\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln(x^2)}{x} + \int \frac{2}{x^2} \, dx = -\frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{2}{x} + C.$$

5. Man bestimme die folgenden Integrale:

(a) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x}{\sin^2 x} dx,$

(b) $\int_0^1 r^2 \sqrt{1-r} dr,$

(c) $\int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx,$

(d) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx,$

(e) $\int \cos(e^{\sin x}) e^{\sin x} \cos x dx,$

(f) $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx,$

(g) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$

Lösung. (a) Wir erhalten

$$I = \int_{\pi/6}^{\pi/2} x \frac{1}{\sin^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x \quad u' = 1 \\ v' = \frac{1}{\sin^2 x} \quad v = -\cot x \end{array} \right| = -x \cot x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot x dx$$

$$= [-x \cot x + \ln |\sin x|]_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \ln 2.$$

(b)

$$I = \int_0^1 r^2 \sqrt{1-r} dr = \left| \begin{array}{l} u = r^2 \quad u' = 2r \\ v' = (1-r)^{1/2} \quad v = -\frac{2}{3}(1-r)^{3/2} \end{array} \right| = \underbrace{-\frac{2r^2}{3}(1-r)^{3/2}}_{=0} \Big|_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 r(1-r)^{3/2} dr$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = r \quad u' = 1 \\ v' = (1-r)^{3/2} \quad v = -\frac{2}{5}(1-r)^{5/2} \end{array} \right| = \frac{4}{3} \left\{ \underbrace{-\frac{2r}{5}(1-r)^{5/2}}_{=0} \Big|_0^1 + \frac{2}{5} \int_0^1 (1-r)^{5/2} dr \right\}$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{2}{5} \frac{2}{7} (1-r)^{7/2} \Big|_0^1 = \frac{16}{105}.$$

(c) Wir erhalten mit der Substitution $u = e^x$:

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x, x = \ln u \quad 1 \rightarrow e \\ dx = \frac{dx}{du} du = \frac{1}{u} du \quad 0 \rightarrow 1 \end{array} \right| = \int_1^e \frac{u}{(1+u)^2} \frac{du}{u} = \int_1^e (1+u)^{-2} du$$

$$= -(1+u)^{-1} \Big|_1^e = -\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e}.$$

(d) Da in diesem Integral der Logarithmus als Argument des Cosinus am störendsten aussieht, substituieren wir:

$$I = \int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int \cos u du = \sin u + C = \sin(\ln x) + C.$$

(e) Wir arbeiten mit doppelter Substitution:

$$I = \int \cos(e^{\sin x}) e^{\sin x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ du = \cos x dx \end{array} \right| = \int \cos(e^u) e^u du = \left| \begin{array}{l} v = e^u \\ du = \frac{dv}{e^u} \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos v dv = \sin v + C = \sin(e^u) + C = \sin(e^{\sin x}) + C.$$

Natürlich hätte man auch sofort $v = e^{\sin x}$ substituieren können und wäre mit einem (dafür komplizierteren) Substitutionsschritt ausgekommen.

(f) Die naheliegendste Substitution ist natürlich $u = e^x$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} dx = \left| \begin{array}{l} u = e^x \\ du = e^x dx \end{array} \right| = \int \frac{u}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} = \int \frac{u}{u^2 + 1} du = \frac{1}{2} \int \frac{2u}{u^2 + 1} du \\ &= \frac{1}{2} \ln(u^2 + 1) + C = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + C; \end{aligned}$$

(g) Wir substituieren für den Logarithmus:

$$I = \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{array} \right| = \int u^2 du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

6. Man finde Stammfunktionen von (a) $\cos^2 x$, (b) $\sin^2 x$, (c) $x^4 e^x$.

Lösung.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int \cos x \cdot \cos x dx &= \sin x \cdot \cos x + \int \sin x \cdot \sin x dx = \sin x \cdot \cos x + \int (1 - \cos^2 x) dx \\ &= x + \sin x \cdot \cos x - \int \cos^2 x dx. \text{ Auflösen nach } \int \cos^2 x dx \text{ liefert die Stammfunktion} \end{aligned}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{x + \sin x \cos x}{2} + C = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \int \sin^2 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) dx = x - \int \cos^2 x dx = x - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \int x^4 \cdot e^x dx &= x^4 e^x - 4 \int x^3 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 4 \cdot 3 \int x^2 e^x dx \\ &= x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 4 \cdot 3 \cdot 2 \int x e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24x e^x + 24 \int e^x dx \\ &= e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24) + C. \end{aligned}$$

7. Man finde Stammfunktionen von (a) $\tan x$, (b) $x e^{-x^2}$, (c) $e^{\sqrt{2x+1}}$, (d) $\frac{1}{\sin x}$, $g(x) = \tan \frac{x}{2}$.

Lösung.

$$\text{(a)} \quad \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\cos x} (-\cos' x) dx = - \int \frac{dz}{z} \Big|_{z=\cos x} = -\ln |\cos x| + C \text{ für } x \notin \pi\mathbb{Z}.$$

$$\text{(b)} \quad \int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} (-2x) dx = -\frac{1}{2} \int e^z dz \Big|_{z=-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

(c) Mit $g(x) = \sqrt{2x+1}$, $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ ergibt sich

$$\int e^{\sqrt{2x+1}} dx = \int e^{\sqrt{2x+1}} \cdot \sqrt{2x+1} \cdot g'(x) dx = \int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(z) dz \Big|_{z=g(x)}$$

mit $f(z) = z e^z$. Nun ist

$$\int z e^z dz = z e^z - \int e^z dz = (z-1) e^z + C.$$

Somit also

$$\int e^{\sqrt{2x+1}} dx = (\sqrt{2x+1} - 1) e^{\sqrt{2x+1}} + C$$

(d) Mit der vorgeschlagenen Substitution $g(x) = \tan \frac{x}{2}$, $g'(x) = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}}$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} (2 \cos^2 \frac{x}{2}) g'(x) dx = \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} g'(x) dx = \int \frac{g'(x)}{g(x)} dx \\ &= \ln |g(x)| + C = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C\end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.