

# Vorkurs Höhere Mathematik

## Lösungen zu den Aufgaben

1. Bestimmen Sie die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) + 2y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Lösung.** Mit dem Exponentialansatz  $y(x) = \exp(\lambda x)$  erhalten wir die charakteristische Gleichung

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Die Nullstelle  $-1$  ermitteln wir durch Probieren. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda + 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \\ &= (\lambda + 1) \left( \lambda + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) \left( \lambda + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right). \end{aligned}$$

Die allgemeine komplexwertige Lösung lautet dann

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{(-1+i\sqrt{3})x/2} + c_3 e^{(-1-i\sqrt{3})x/2}.$$

Aus der Euler'schen Formel (siehe Vorlesung) erhalten wir

$$e^{(-1+i\sqrt{3})x/2} = e^{-x/2} \left( \cos(\sqrt{3}x/2) + i \sin(\sqrt{3}x/2) \right).$$

Damit ist die reellwertige Lösung durch

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x/2} \cos(\sqrt{3}x/2) + c_3 e^{-x/2} \sin(\sqrt{3}x/2)$$

für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  gegeben.

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung:

$$y''' - y'' = 3e^{2x}.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der homogenen Differentialgleichung  $y''' - y'' = 0$ .

(b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung  $y_p$  der Differentialgleichung  $y''' - y'' = 3e^{2x}$ .

(c) Geben Sie die Lösungsmenge der Differentialgleichung  $y''' - y'' = 3e^{2x}$  an.

**Lösung.** (a) Die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2(\lambda - 1)$$

hat die beiden Nullstellen 1 (einfach) und 0 (doppelt). Damit ist

$$L_h = \{c_1 e^x + c_2 + c_3 x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

die Lösungsmenge des homogenen Systems.

(b) Mit dem Ansatz  $y_p = c e^{2x}$  (Ansatz vom Typ der rechten Seite) erhält man beim Einsetzen in die Dgl:

$$3e^{2x} = 4c e^{2x}.$$

Folglich ist  $c = \frac{3}{4}$ . Eine partikuläre Lösung ist damit

$$y_p = \frac{3}{4} e^{2x}.$$

(c) Die allgemeine Lösungsmenge lautet

$$L = y_p + L_h = \left\{ \frac{3}{4} e^{2x} + c_1 e^x + c_2 + c_3 x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differenzialgleichung

$$y'''(x) + 3y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x + 6e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Hinweis:* Machen Sie für eine partikuläre Lösung  $y_p$  den Ansatz:  $y_p(x) = Ax + B + Cx^3 e^{-x}$ .

**Lösung.** Zunächst muß die allgemeine Lösung  $u_h$  der zugehörigen homogenen linearen Differenzialgleichung bestimmt werden. Dazu verwenden wir den Exponentialansatz  $y(x) = \exp(\lambda x)$ . Die charakteristische Gleichung ergibt sich zu

$$0 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3.$$

Die Zahl  $-1$  ist eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Damit folgt

$$y_h(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung  $y_p$  der inhomogenen linearen Differenzialgleichung verwenden wir den Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da  $-1$  eine dreifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, lautet der Ansatz

$$y_p(x) = Ax + B + Cx^3 e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A + C(3x^2 - x^3) e^{-x}, \\ y_p''(x) &= C(6x - 6x^2 + x^3) e^{-x}, \\ y_p'''(x) &= C(6 - 18x + 9x^2 - x^3) e^{-x} \end{aligned}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} x + 6e^{-x} &= C(6 - 18x + 9x^2 - x^3) e^{-x} \\ &\quad + 3C(6x - 6x^2 + x^3) e^{-x} \\ &\quad + 3A + 3C(3x^2 - x^3) e^{-x} \\ &\quad + Ax + B + Cx^3 e^{-x} \\ &= 3A + B + Ax + 6C e^{-x} \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt  $C = 1$ ,  $A = 1$  und  $B = -3$ . Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ist demnach

$$u(x) = Ax - 3 + x^3 e^{-x} + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$$

für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ .

4. Gegeben ist die Differenzialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = e^{2x} \sin x, x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des homogenen Problems.
- (b) Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Problems.
- (c) Bestimmen Sie eine Lösung  $y$  mit  $y(0) = 3/5, y'(0) = 1$ .

**Lösung.** (a) Der Exponentialansatz  $y(x) = \exp(\lambda x)$  führt auf das charakteristische Polynom  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ . Dieses hat die Nullstellen  $\lambda_{1/2} = 1 \pm i$ . Daher haben wir die beiden reellwertigen Lösungen

$$y_1(x) = e^x \cos(x) \quad \text{und} \quad y_2(x) = e^x \sin(x)$$

der homogenen Differenzialgleichung gefunden. Somit lautet die allgemeine Lösung des homogenen Problems

$$y_h(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x), x \in \mathbb{R},$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(b) Wir verwenden den Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$y_p(x) = (A \sin(x) + B \cos(x)) e^{2x}.$$

Für die Ableitungen ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= ((2A - B) \sin(x) + (A + 2B) \cos(x)) e^{2x}, \\ y_p''(x) &= ((3A - 4B) \sin(x) + (4A + 3B) \cos(x)) e^{2x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differenzialgleichung liefert

$$\begin{aligned} e^{2x} \sin x &= ((3A - 4B) \sin(x) + (4A + 3B) \cos(x)) e^{2x} \\ &\quad - 2((2A - B) \sin(x) + (A + 2B) \cos(x)) e^{2x} \\ &\quad + 2(A \sin(x) + B \cos(x)) e^{2x} \\ &= ((A - 2B) \sin(x) + (2A + B) \cos(x)) e^{2x}. \end{aligned}$$

So sehen wir durch Koeffizientenvergleich, dass  $A - 2B = 1$  sowie  $2A + B = 0$ . Damit ergibt sich  $A = 1/5$  und  $B = -2/5$ . Die partikuläre Lösung des inhomogenen Problems ist

$$y_p(x) = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x - 2 \cos x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

(c) Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung lautet

$$y(x) = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x - 2 \cos x) + c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x.$$

Die Ableitung ist

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{5} e^{2x} (4 \sin x - 3 \cos x) + (c_1 + c_2) e^x \cos x \\ &\quad + (c_2 - c_1) e^x \sin x. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingungen erhält man

$$\begin{aligned} -\frac{2}{5} + c_1 &= \frac{3}{5}, \\ -\frac{3}{5} + c_1 + c_2 &= 1. \end{aligned}$$

Hiermit folgt  $c_1 = 1$  und  $c_2 = 3/5$ . Die Lösung des Anfangswertproblems ist durch

$$y(x) = \frac{e^{2x}}{5} (\sin x - 2 \cos x) + \frac{e^x}{5} (5 \cos x + 3 \sin x)$$

für  $x \in \mathbb{R}$  gegeben.

5. Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

(a)  $y'x = 2y$

(b)  $y' = \frac{2x}{x^2+1}y$

(c)  $y'(y+1)^2 + x^3 = 0$

**Lösung.** Man löst jeweils durch Separation der Variablen:

(a)  $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x} + C$  ergibt  $\ln|y| = 2\ln|x| + C$ , bzw.  $y = \pm e^C x^2$ . Achtung die Lösungen lassen sich bei  $x = 0$  differenzierbarstückeln, somit ist die vollständige Lösung

$$y(x) = cx^2.$$

mit  $c \in \mathbb{R}$ .

(b)  $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2xdx}{x^2+1} + C$  ergibt  $\ln|y| = \ln(x^2 + 1) + C$  als Lösung. Durch Auflösen nach  $y$  erhält man

$$y(x) = \pm e^C(x^2 + 1).$$

Die Nullfunktion ist auch eine Lösung. Somit kann man die Lösungen zusammenfassen zu

$$y(x) = c(x^2 + 1) = cx^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(c)  $\int (y+1)^2 dy = \int (-x^3) dx + C$  ergibt  $\frac{1}{3}(y+1)^3 = -\frac{1}{4}x^4 + C$ . Explizit:

$$y(x) = \sqrt[3]{C - \frac{3}{4}x^4} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$